3 Predikátová logika – syntax a sémantika

Příklad 1. Převeďte následující tvrzení v přirozené řeči na formule predikátové logiky. Popiště intuitivně význam jednotlivých predikátů a funkcí.

0) Každý člověk má matku. (Univerzum: lidé)

   $\forall x \exists y M(y, x)$, kde

$M(x, y)$	x je matka y	predikát

0) Ne každý má férového nadřízeného. (Univerzum: pracovníci)

   $\neg \forall x (F(n(x)))$, kde

$F(x)$	x je férový	predikát
$n(x)$	nadřízený pracovníka x	funkce

a) Každý usilovný student zná nějakého nadaného studenta. (Univerzum: studenti)

b) Sčítání je komutativní (čili výsledek součtu nezáleží na pořadí sčítanců). (Univerzum: $\mathbb{R}$)

c) Je-li číslo dělitelné čtyřmi, pak číslo o 4 větší je rovněž dělitelné čtyřmi. (Univerzum: $\mathbb{Z}$)

Definice: *Term.*

- Každý symbol pro proměnnou je term.
- Je-li f n-ární funkční symbol a $t_1, \ldots, t_n$ termy, pak také $f(t_1, \ldots, t_n)$ je term.
- Nic dalšího není term.

Nulární funkce, čili konstanty, zapisujeme bez prázdných závorek, tedy c namísto $c()$.

U běžných binárních funkčních symbolů lze používat i infixový zápis bez závorek. U běžných unárních symbolů lze používat i prefixový zápis bez závorek.

Definice: *Formule predikátové logiky.*

- Je-li P n-ární predikátový symbol a $t_1, \ldots, t_n$ termy, pak $P(t_1, \ldots, t_n)$ je formule.
- Jsou-li t_1, t_2 termy, je $t_1 = t_2$ formule.
- Jsou-li φ, ψ fomule, pak rovněž $\neg(\varphi)$, $(\varphi) \vee (\psi)$, $(\varphi) \wedge (\psi)$, $(\varphi) \Rightarrow (\psi)$, $(\varphi) \Leftrightarrow (\psi)$, ... jsou formule.
- Je-li φ fomule a x proměnná, pak rovněž $\exists x(\varphi)$ a $\forall x(\varphi)$ jsou formule.
- Nic jiného formulí není.

U běžných binárních predikátových symbolů lze používat i infixový zápis bez závorek.

Definice: Výskyt proměnné x ve formuli φ je *vázaný*, existuje-li podformule φ, ozn. ψ, která obsahuje tento výskyt a začíná $\exists x$ nebo $\forall x$. V opačném případě je výskyt proměnné *volný*.

Běžně používané značení $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ znamená, že formule φ má volný výskyt proměnných $x_1, \dots, x_n$, ostatní proměnné jsou ve formuli vázané.

Příklad 2. Ve formuli

$$\varphi \equiv 2 \mid x \Rightarrow \exists y(y \cdot 2 = x \vee \sin(x + y) > 1),$$

kde všechny symboly mají obvyklý (matematický) význam, identifikujte (vč. arity, pokud to dává smysl) všechny

a) proměnné (vč. jejich výskytů),
b) termy,
c) logické spojky,
d) funkční symboly,
e) predikátové symboly.

U funkčních a predikátových symbolů určete i jejich aritu.

Příklad 3. Uvažujte jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky obsahující funkční a predikátové symboly zadané následující tabulkou:

symbol	typ	arita
f	funkční	3
d	funkční	0
P	predikátový	1
Q	predikátový	2

Rozhodněte, která z následujících slov jsou **termy** jazyka $\mathcal{L}$:

a) $y = x$,
b) $Q(d, d)$,
c) $f(x, d, y)$,
d) z,
e) $f(f(d))$,
f) $f(d, f(d, d, d), d)$.

Příklad 4. Uvažujte jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky z předchozího příkladu. Rozhodněte, která z následujících slov jsou **formulemi** jazyka $\mathcal{L}$:

a) $y = x$,

b) $\forall x(Q(d,d) = x)$,

c) $f(x,d,y)$,

d) $\forall y(f(f(x,y,z),d,d))$,

e) $Q(f(x,d,y))$,

f) $\forall x(Q(f(f(d,d,d),y,z),f(z,d,y)) \vee P(f(d,z,x)))$.

Příklad 5. Negujte následující formule:

a) $\exists x((P(x) \wedge Q(x)) \vee R(x))$,

b) $\forall x(P(x) \Rightarrow \forall y Q(y))$,

c) $\forall x(P(x) \vee \exists y Q(y))$,

d) $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \exists x(R(x) \wedge S(x))$.

Definice: *Interpretace* (též *realizace*) jazyka $\mathcal{L}$ je struktura I zahrnující

- neprázdné *univerzum* (či *doménu*) $\mathcal{D}_I$,
- n-ární relaci $I(P) \subseteq \mathcal{D}_I^n$ pro každý n-ární predikátový symbol P jazyka $\mathcal{L}$,
- zobrazení $I(f) : \mathcal{D}_I^n \to \mathcal{D}_I$ pro každý n-ární funkční symbol f jazyka $\mathcal{L}$.

Příklad 6. Uvažte formuli $\varphi \equiv \forall x(P(x) \Rightarrow \exists y \neg Z(x,y))$. Pro každou z následujících interpretací rozhodněte, zda je modelem formule φ.

a) $\mathcal{D}_I = \{0\}$, $I(P) = \varnothing$, $I(Z) = \varnothing$

b) $\mathcal{D}_I = \mathbb{Z}$, $I(P) = \{1,2,3,\dots\}$, $I(Z) = \mathbb{Z}^2$

c) $\mathcal{D}_I = \mathbb{Z}$, $I(P) = \{1,2,3,\dots\}$, $I(Z) = \leq$

d) $\mathcal{D}_I = \{0\}$, $I(P) = \{0\}$, $I(Z) = \mathrm{id}$[1]

Příklad 7. Rozhodněte, v jakých interpretacích jsou pravdivé následující formule:

a) $\exists x \forall y(P(y) \Rightarrow (x = y))$

b) $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow (x = y)))$

c) $\forall x \exists y \exists z(((x = y) \vee (x = z)) \wedge (y \neq z))$

d) $\forall x \exists y Q(x,y) \Rightarrow \exists x Q(x,x)$

e) $\forall x \exists y(P(x,x) \Rightarrow (x \neq y \wedge P(x,y)))$

[1] Relace identity obsahuje dvojice identických prvků, $\mathrm{id} := \{(x,y) \in \mathcal{D}_I^2; x = y\}$.