IB107 Vyčíslitelnost a složitost

Riceovy věty, redukce

Jan Strejček

Fakulta informatiky
Masarykova univerzita

respektování funkcí

Definice 9.2 (respektování funkcí)

Množina $A \subseteq \mathbb{N}$ respektuje funkce, jestliže platí

$$i \in A \text{ a } \varphi_i = \varphi_j \implies j \in A.$$

- A respektuje funkce, právě když $\overline{A}$ respektuje funkce
- $\emptyset$, $\mathbb{N}$
- konečná neprázdná množina $A \subseteq \mathbb{N}$
- $\{i \mid \varphi_i \text{ je prostá}\}$
- $\{i \mid W_i = \{42\}\}$

1. Riceova věta

Věta 9.1 (1. Riceova věta)

Neprázdná vlastní podmnožina $\mathbb{N}$ (tedy A splňující $\emptyset \neq A \subsetneq \mathbb{N}$), která respektuje funkce, není rekurzivní.

Důkaz: (sporem)

- předpokládejme, že A je rekurzivní
- nechť ϵ je prázdná funkce ($dom(\epsilon) = \emptyset$) a $\{i \mid \varphi_i = \epsilon\} \subseteq \overline{A}$
- nechť θ je nějaká vyčíslitelná funkce splňující $\{i \mid \varphi_i = \theta\} \subseteq A$
- nechť $f(i)$ je totálně vyčíslitelná funkce vracející kód programu

$$\underline{\textbf{begin}}\ x_2 := \Phi(i, i);\ x_1 := \theta(x_1)\ \underline{\textbf{end}}$$

- tedy $f(i) \in A \iff i \in K$ a tudíž K je rekurzivní (**spor**) ■

použití 1. Riceovy věty

$A = \{i \mid \varphi_i \text{ je prostá}\}$ není rekurzivní

Existují nerekurzivní množiny, které nerespektují funkce.
(Jejich nerekurzivita není důsledkem 1. Riceovy věty.)

důsledky 1. Riceovy věty

1. Množina všech indexů programů s daným vstupně-výstupním chováním, která není rovna $\emptyset$ nebo $\mathbb{N}$, není rekurzivní.

2. Není rozhodnutelné, zda má funkce φ_i danou netriviální vlastnost, která není závislá na jejím indexu.

3. Není rozhodnutelné, zda jsou dvě vyčíslitelné funkce identické (nebo dva algoritmy/while-programy sémanticky ekvivalentní).

1. Riceova věta pro relace

Definice 9.6 (respektovaní funkcí relacemi)

Množina $R \subseteq \mathbb{N}^k$ *respektuje funkce*, *jestliže* $(a_1, \ldots, a_k) \in R$ *a* $\varphi_{a_1} = \varphi_{b_1}, \ldots, \varphi_{a_k} = \varphi_{b_k}$ *implikuje* $(b_1, \ldots, b_k) \in R$.

- $\{(i, j) \mid \varphi_i = \varphi_j\}$
- $\{(i, j, k) \mid \varphi_i(3) + \varphi_j(4) = \varphi_k(5)\}$

Věta 9.7 (1. Riceova věta pro relace)

Nechť $R \subseteq N^k$ *respektuje funkce. Pak* R *je rekurzivní, právě když* $R = \emptyset$ *nebo* $R = \mathbb{N}^k$.

2. Riceova věta

Věta 9.9 (2. Riceova věta)

Nechť $A \subseteq \mathbb{N}$ respektuje funkce a nechť existují vyčíslitelné funkce $\theta, \theta' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že $\theta \leq \theta'$ a dále:

- $\{i \mid \varphi_i = \theta\} \subseteq A$
- $\{i \mid \varphi_i = \theta'\} \subseteq \overline{A}$

Pak A není r.e.

Důkaz:

$$\xi(i,j) = \begin{cases} \theta'(j) & \text{je-li } \varphi_i(i) \text{ definováno} \\ \theta(j) & \text{jinak} \end{cases}$$

- ξ je vyčíslitelná (příklad 2.10 ze cvičení)
- existuje TVF f splňující $\xi(i,j) = \varphi_{f(i)}(j)$ (translační lemma)
- pak $f(i) \in A \iff i \in \overline{K}$, tedy $\overline{K} = f^{-1}(A)$
- vzor r.e. množiny při TVF f je r.e. množina
- ovšem $\overline{K}$ není r.e. a proto ani A není r.e. ∎

použití 2. Riceovy věty

$B = \{i \mid \varphi_i$ není totální$\}$ není r.e.

Existují množiny, které nejsou r.e. a nelze to dokázat 2. Riceovou větou. Například $\{i \mid \varphi_i(x) = 1$ pro všechna $x\}$.

3. Riceova věta

Věta 9.11 (3. Riceova věta)

Nechť $A \subseteq \mathbb{N}$ respektuje funkce a nechť existuje vyčíslitelná funkce $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující:

- $\{i \mid \varphi_i = \theta\} \subseteq A$
- $\{i \mid \varphi_i \leq \theta \text{ a } dom(\varphi_i) \text{ je konečná množina}\} \subseteq \overline{A}$

Pak A není r.e.

Důkaz:

$$\mu(i,j) = \begin{cases} \perp & \text{jestliže } P_i \text{ zastaví na } i \text{ během } j \text{ kroků} \\ \theta(j) & \text{jinak} \end{cases}$$

- μ je vyčíslitelná
- existuje TVF f splňující $\mu(i,j) = \varphi_{f(i)}(j)$ (translační lemma)
- $i \in \overline{K} \implies \varphi_{f(i)} = \theta \implies f(i) \in A$
- $i \in K \implies dom(\varphi_{f(i)})$ je konečná a $\varphi_{f(i)} \leq \theta \implies f(i) \in \overline{A}$
- celkem $i \in \overline{K} \iff f(i) \in A$, tedy $\overline{K} = f^{-1}(A) \quad \dots$ ∎

použití 3. Riceovy věty

$C = \{i \mid \varphi_i = f\}$, kde f je pevně zvolená totálně vyčíslitelná funkce, není r.e.

Množina všech indexů programů s daným nekonečným vstupně-výstupním chováním není rekurzivně spočetná.

Existují množiny, které nejsou r.e. a nelze to o nich dokázat Riceovými větami.

intuice pro redukci

$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je dělitelné } 13\}$

$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je dělitelné } 26\}$

intuice pro redukci

$K = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(i) \text{ je definováno}\}$

$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je dělitelné } 26\}$

Definice 10.1 (m-redukce, m-ekvivalence)

Nechť $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Řekneme, že A se m-redukuje na B, píšeme $A \leq_m B$, právě když existuje totálně vyčíslitelná funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že

$$x \in A \iff f(x) \in B.$$

Funkci f nazveme redukcí A na B.

A a B jsou m-ekvivalentní, psáno $A \equiv_m B$, pokud $A \leq_m B$ a $B \leq_m A$.

Platí $A \leq_m B \implies \overline{A} \leq_m \overline{B}$.
Platí $A \leq_m B$ a $B \leq_m C \implies A \leq_m C$ (tj. $\leq_m$ je tranzitivní).

příklad redukce

$K = \{i \mid \varphi_i(i) \text{ je definováno}\}$
$J = \{i \mid \varphi_i(i) = 1\}$

$K \leq_m J$:

příklad redukce

$K = \{i \mid \varphi_i(i) \text{ je definováno}\}$
$J = \{i \mid \varphi_i(i) = 1\}$

$J \leq_m K$:

redukce a rozhodnutelnost

Věta 10.3

Nechť $A \leq_m B$.

1. *B je rekurzivní $\implies$ A je rekurzivní.*
2. *B je rekurzivně spočetná $\implies$ A je rekurzivně spočetná.*

Důkaz: $A \leq_m B$, tedy existuje tot. vyčíslitelná funkce f splňující

$$x \in A \iff f(x) \in B$$

1. B je rekurzivní, tedy χ_B je tot. vyčíslitelná

2. B je r.e., tedy $B = dom(g)$ pro nějakou vyčíslitelnou funkci g

∎

Důsledek 10.4

Nechť $A \leq_m B$.

1. *A není rekurzivní $\implies$ B není rekurzivní.*
2. *A není rekurzivně spočetná $\implies$ B není rekurzivně spočetná.*

Důsledek

Nechť $A \equiv_m B$.

1. *A je rekurzivní $\iff$ B je rekurzivní.*
2. *A je rekurzivně spočetná $\iff$ B je rekurzivně spočetná.*

typické aplikace

- důkaz (částečné) rozhodnutelnosti A

- důkaz nerozhodnutelnosti B

r.e. množiny a K

Věta 10.5

Je-li $A \subseteq \mathbb{N}$ rekurzivně spočetná, pak $A \le_m K$.

Důkaz: Nechť g je vyčíslitelná funkce splňující $A = dom(g)$.

```
begin
    y := g(i);
    x_1 := 1
end
```

■

těžká a úplná množina

Definice 10.6 (těžká a úplná množina)

Nechť $\mathbb{C}$ je třída podmnožin množiny $\mathbb{N}$ a $A \subseteq \mathbb{N}$. Řekneme, že A je $\mathbb{C}$-těžká, právě když pro každou množinu $B \in \mathbb{C}$ platí $B \leq_m A$. Je-li navíc $A \in \mathbb{C}$, pak A nazýváme $\mathbb{C}$-úplná nebo úplná ve třídě $\mathbb{C}$.

Věta 10.7

Množina K je úplná ve třídě všech rekurzivně spočetných množin.