

# IB107 Vyčísitelnost a složitost

prostorová složitost, vztahy složitostních tříd, TQBF

Jan Strejček

Fakulta informatiky  
Masarykova univerzita

- paměť použitá při výpočtu
- závisí na vstupu
- jako základní model použijeme **Turingův stroj**
- zkoumáme **nejhorší případ**, tedy maximální počet přečtených políček pásky v závislosti na délce vstupu
- lze zkoumat i **průměrný případ**

## Definice 2.1 (prostorová složitost deterministického TM)

Nechť  $\mathcal{M}$  je úplný deterministický (jednopáskový nebo vícepáskový) Turingův stroj se vstupní abecedou  $\Sigma$ . Pro každé  $w \in \Sigma^*$  definujeme  $s_{\mathcal{M}}(w)$  jako počet políček pásky, které stroj  $\mathcal{M}$  čte při výpočtu na vstupu  $w$ . **Prostorová složitost** stroje  $\mathcal{M}$  je pak funkce  $S_{\mathcal{M}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definovaná vztahem

$$S_{\mathcal{M}}(n) = \max\{s_{\mathcal{M}}(w) \mid w \in \Sigma^n\}.$$

## Definice 2.2 (prostorová složitost nedeterministického TM)

Definice **prostorové složitosti** úplného nedeterministického Turingova stroje se liší jen tím, že  $s_{\mathcal{M}}(w)$  označuje maximální počet políček pásky, které stroj  $\mathcal{M}$  čte při nějakém výpočtu na vstupu  $w$ .

# Příklad

$$\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_{acc}, q_{rej}\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \triangleright, \sqcup\}, \triangleright, \sqcup, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$$

$\delta$	$\triangleright$	0	1	$\sqcup$
$q_0$	$(q_0, \triangleright, R)$	$(q_0, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_{acc}, -, -)$
$q_1$		$(q_{rej}, -, -)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_{acc}, -, -)$

## Věta

*Pro každý deterministický úplný TM  $\mathcal{M}$  a pro každé  $m > 1$  lze zkonstruovat deterministický úplný TM  $\mathcal{M}'$  tak, že  $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}')$  a*

$$S_{\mathcal{M}'}(n) = \left\lceil \frac{S_{\mathcal{M}}(n)}{m} \right\rceil + n + 2.$$

**Důkaz:**



Protože prostor lze komprimovat, používáme asymptotickou notaci.

**prostorová složitost problému** = nejmenší prostorová složitost, s jakou lze daný problém rozhodnout

## Definice 2.3 (prostorové složitostní třídy problémů)

Každá funkce  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definuje **prostorové složitostní třídy problémů**:

$$SPACE(f(n)) = \{L \mid L \text{ je rozhodovaný nějakým det. TM } \mathcal{M} \text{ s prostorovou složitostí } S_{\mathcal{M}}(n) = \mathcal{O}(f(n))\}$$

$$NSPACE(f(n)) = \{L \mid L \text{ je rozhodovaný nějakým nedet. TM } \mathcal{N} \text{ s prostorovou složitostí } S_{\mathcal{N}}(n) = \mathcal{O}(f(n))\}$$

# $SAT \in SPACE(n)$

$SAT = \{\langle \varphi \rangle \mid \varphi \text{ je splnitelná výroková formule}\}$

$SAT$  může být rozhodován deterministickým třípáskovým TM  $\mathcal{M}$ :

- na 2. pásku postupně zapisujeme všechna ohodnocení proměnných
- na 3. pásce pro dané ohodnocení ověříme, zda splňuje  $\varphi$
- akceptujeme, pokud narazíme na splňující ohodnocení
- zamítneme, pokud žádné ohodnocení není splňující

Prostor lze použít opakovaně.

## Věta

Pro každou funkci  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  platí:

- 1  $TIME(f(n)) \subseteq NTIME(f(n))$
- 2  $SPACE(f(n)) \subseteq NSPACE(f(n))$
- 3  $TIME(f(n)) \subseteq SPACE(f(n))$
- 4  $NTIME(f(n)) \subseteq NSPACE(f(n))$
- 5  $SPACE(f(n)) \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} TIME(k^{f(n)})$
- 6  $NSPACE(f(n)) \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} NTIME(k^{f(n)})$

**Důkaz:**



## Věta 2.6 (Savitchova věta)

*Pro každou funkci  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  splňující  $f(n) \geq n$  platí:*

$$NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f^2(n))$$

Standardní převod nedet. TM na deterministický nefunguje:

**Důkaz:** Necht  $\mathcal{N}$  je nedet. TM s prostorovou složitostí  $f(n)$ . Stroj upravíme tak, aby před akceptováním smazal pásku a posunul hlavu zcela vlevo. Má tedy jen jednu akceptující konfiguraci  $c_{acc}$ . Výpočet stroje má maximálně  $k^{f(n)}$  kroků.

Ekvivalentní deterministický stroj  $\mathcal{M}$  implementuje proceduru  $comp(c_1, c_2, t)$ , která akceptuje, pokud lze ve stroji  $\mathcal{N}$  během nejvýše  $t$  kroků přejít z konfigurace  $c_1$  do  $c_2$ , jinak zamítá. Je-li  $c_w$  iniciální konfigurace stroje  $\mathcal{N}$  pro  $w$ , stačí tedy spustit  $comp(c_w, c_{acc}, k^{f(n)})$ .

$comp(c_1, c_2, t)$  lze implementovat rekurzivně:

Algoritmus pro  $comp(c_1, c_2, t)$ :

$t = 1$ : Otestujeme, zda platí  $c_1 = c_2$  nebo  $c_1 \perp_{\mathcal{N}} c_2$ .

Pokud platí, akceptujeme, jinak zamítneme.

$t > 1$ : Pro každou konfiguraci  $c'$  stroje  $\mathcal{N}$  využívající nejvýše  $f(n)$  políček

- spustíme  $comp(c_1, c', \lceil \frac{t}{2} \rceil)$  a  $comp(c', c_2, \lceil \frac{t}{2} \rceil)$ ,
- pokud obojí akceptuje, akceptujeme.

Pokud žádné  $c'$  nevedlo k akceptování, zamítneme.

Prostorová složitost:

- $comp$  potřebuje prostor na  $c_1, c_2, c'$  a  $t$  (a něco konstantního):
- hloubka rekurzivního volání:
- celkem:



$$PSPACE = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} SPACE(n^k)$$

$$NPSPACE = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} NSPACE(n^k)$$

## Věta

$$PSPACE = NPSPACE$$

**Důkaz:** Plyne přímo z definice ( $\subseteq$ ) a ze Savitchovy věty ( $\supseteq$ ). ■

# sublineární prostorové složitostní třídy

- chceme podchytit prostor využívaný nad rámec vstupu
- upravíme výpočetní model:
  - (vícepáskový) Turingův stroj se speciální **vstupní páskou**
  - vstupní páska je konečná, za vstupem je koncová značka  $\triangleleft$
  - vstupní pásku lze pouze číst, nelze na ni zapsat
  - čtení ze vstupní pásky se nezapočítává do počtu přečtených políček  $s_M(w)$
- v tomto modelu je každý regulární jazyk v  $\text{SPACE}(1)$

$$L = \text{LOGSPACE} = \text{SPACE}(\log n)$$

$$NL = \text{NLOGSPACE} = \text{NSPACE}(\log n)$$

**Příklad:**  $\{0^k 1^k \mid k \geq 0\} \in L$

$L \subseteq NL \subseteq P \subseteq NP \subseteq NPSPACE = PSPACE \subseteq EXPTIME \subseteq NEXPTIME$

$NL \subsetneq PSPACE$

$P \subsetneq EXPTIME$

# problém TQBF

**QBF** = kvantifikované výrokové formule (proměnné v doméně  $\{0, 1\}$ )

$$\exists x \forall y ((x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y))$$

Předpokládáme, že QBF formule jsou v prenexní formě (tedy kvantifikátory jsou pouze na začátku formule).

**Definice (problém TQBF (true quantified Boolean formula))**

*Problém TQBF je problém rozhodnout, zda je daná QBF formule bez volných proměnných pravdivá.*

$TQBF = \{\langle \varphi \rangle \mid \varphi \text{ je pravdivá QBF formule bez volných proměnných}\}$

**Věta 2.9**

*TQBF je PSPACE-úplný.*

**Důkaz:**  $TQBF \in PSPACE$ : lze řešit rekurzivní procedurou  $t(\varphi)$ :

- 1 Je-li  $\varphi$  tvaru  $\exists x(\varphi')$ , spustíme  $t(\varphi'[x \mapsto 0])$  a  $t(\varphi'[x \mapsto 1])$ .  
Pokud alespoň jedno z volání akceptuje, akceptujeme. Jinak zamítneme.
- 2 Je-li  $\varphi$  tvaru  $\forall x(\varphi')$ , spustíme  $t(\varphi'[x \mapsto 0])$  a  $t(\varphi'[x \mapsto 1])$ .  
Pokud obě volání akceptují, akceptujeme. Jinak zamítneme.
- 3 Pokud  $\varphi$  neobsahuje kvantifikátory, snadno vyhodnotíme a akceptujeme, pokud je  $\varphi$  pravdivá. Jinak zamítneme.

Prostorová složitost:

- v jednom zavolání  $t$  si pamatujeme pouze něco konstantního
- hloubka rekurzivního volání:
- celkem:



# TQBF je PSPACE-úplný

**TQBF je PSPACE-těžký:** ukážeme  $A \in \text{PSPACE} \implies A \leq_p \text{TQBF}$

Nechť  $\mathcal{M}$  je TM s prostorovou složitostí  $n^k$  rozhodující  $A$ . Tedy  $\mathcal{M}$  pracuje v čase  $d^{(n^k)}$ . Předpokládáme, že  $\mathcal{M}$  má jednu akceptující konfiguraci  $c_{acc}$ . Důkaz kombinuje myšlenky důkazů NP-těžkosti SATu a Savitchovy věty.

Pro každé slovo  $w$  sestrojíme QBF formuli  $\Phi$ , která je pravdivá, právě když existuje výpočet stroje  $\mathcal{M}$  z iniciální konfigurace pro  $w$  do akceptující konfigurace  $c_{acc}$  s nejvýše  $d^{(n^k)}$  kroky.

# TQBF je PSPACE-úplný

Induktivně definujeme formuli  $\Phi'_{c_1, c_2, t}$  říkající, že existuje výpočet stroje  $\mathcal{M}$  z  $c_1$  do  $c_2$  s nejvýše  $t$  kroky:

$t = 1$ :  $\Phi'_{c_1, c_2, 1}$  je pravdivá, právě když  $c_1 = c_2$  nebo  $c_1 \stackrel{\mathcal{M}}{\vdash} c_2$ .

$t > 1$ :  $\Phi'_{c_1, c_2, t} = \exists m \forall (c_3, c_4) \in \{(c_1, m), (m, c_2)\} \left( \Phi'_{c_3, c_4, \lceil \frac{t}{2} \rceil} \right)$

Pak  $\Phi = \exists c_1, c_2 \left( \Phi_{c_1=c_{start}} \wedge \Phi_{c_2=c_{acc}} \wedge \Phi'_{c_1, c_2, d(n^k)} \right)$ .

$|\Phi|$  je polynomiální vzhledem k  $|w| = n$  a  $\Phi$  je pravdivá  $\iff w \in A$

Celkem  $A \leq_p TQBF$  pro každé  $A \in PSPACE$ . ■