

Jméno: Brouk Pytlík

UČO: 1234567

0007

líst

1

učo

1234567

body

Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte
leva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

1. [3 body] Uvažme funkci $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ definovanou následovně:

$$f(i, j) = \begin{cases} \varphi_i(\varphi_j(j) + \varphi_i(j)) & \text{pokud } \varphi_j(j) \neq \perp \text{ a } \varphi_i(j) \neq \perp, \\ \varphi_i(5) & \text{jinak.} \end{cases}$$

- a) (2.5 bodu) Rozhodněte a dokažte, zda je funkce f vyčíslitelná.
b) (0.5 bodu) Rozhodněte a dokažte, zda existuje totálně vyčíslitelná funkce $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $i, j \in \mathbb{N}$ platí

$$\varphi_{h(j)}(i) = f(i, j).$$

- a) Funkce $f(i, j)$ není vyčíslitelná, což dokážeme sporem. Předpokládejme, že $f(i, j)$ je vyčíslitelná. Definujeme funkci

$$p(x) = \begin{cases} 99 & \text{pokud } x = 5, \\ 100 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Funkce $p(x)$ je počítaná následujícím programem a tedy vyčíslitelná. Označme její index e .

```
begin
  if  $x_1 = 5$  then  $x_1 := 99$  else  $x_1 := 100$ 
end
```

Pokud je funkce f vyčíslitelná, je vyčíslitelná i funkce $h(x) = f(e, x) - 99$, pro kterou platí

$$h(x) = f(e, x) - 99 = \begin{cases} \varphi_e(\varphi_x(x) + \varphi_e(x)) - 99 & \text{pokud } \varphi_x(x) \neq \perp \text{ a } \varphi_e(x) \neq \perp, \\ \varphi_e(5) - 99 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tento zápis dále zjednodušíme díky pozorování, že funkce φ_e je totální a $\varphi_e(x) > 5$ pro všechna x . V prvním případě tedy platí $\varphi_x(x) + \varphi_e(x) > 5$ a proto $\varphi_e(\varphi_x(x) + \varphi_e(x)) = 100$. Dostáváme

$$h(x) = \begin{cases} 100 - 99 = 1 & \text{pokud } \varphi_x(x) \neq \perp, \\ 99 - 99 = 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Funkce h je tedy totožná s funkcí $halt$, která rozhoduje problém zastavení. Z přednášky víme, že funkce $h = halt$ není vyčíslitelná. Tím jsme dostali spor, přičemž jediným předpokladem bylo, že funkce f je vyčíslitelná.

- b) Sporem dokážeme, že funkce $h(j)$ s požadovanými vlastnostmi neexistuje.

Předpokládejme, že existuje totálně vyčíslitelná funkce $h(j)$ splňující $f(i, j) = \varphi_{h(j)}(i)$. Pak je ovšem funkce $f(i, j)$ vyčíslitelná, protože ji můžeme implementovat následujícím programem, kde Φ je vyčíslitelná univerzální funkce pro standardní numeraci unárních vyčíslitelných funkcí.

```
begin
   $x_3 := h(x_2);$ 
   $x_1 := \Phi(x_3, x_1);$ 
end
```

O funkci f jsme ovšem dokázali, že není vyčíslitelná. Dostáváme tedy spor.