

Jméno: Ferda Mravenec

UČO: 1234567

0007

líst

|

učo

1234567

body

Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

2. [3 body] Uvažme funkci $g: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ definovanou následovně:

$$g(i, j) = \begin{cases} \varphi_i(\varphi_j(j) + \varphi_i(j)) & \text{pokud pro všechna } k \geq \min(i, j) \text{ platí } \varphi_k(j) \neq \perp, \\ \varphi_i(5) & \text{jinak.} \end{cases}$$

- a) (2.5 bodu) Rozhodněte a dokažte, zda je funkce g vyčíslitelná.
- b) (0.5 bodu) Rozhodněte a dokažte, zda existuje totálně vyčíslitelná funkce $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $i, j \in \mathbb{N}$ platí

$$\varphi_{h(j)}(i) = g(i, j).$$

a) Funkce g je vyčíslitelná.

Uvažme funkci $m(x) = \perp$ s prázdným definičním oborem. Tato funkce je vyčíslitelná (počítá ji například program P_{empty}) a jako každá vyčíslitelná funkce má nekonečně mnoho indexů. Pro libovolné i, j tedy existuje index k této funkce takový, že $k \geq \min(i, j)$. Jelikož $\varphi_k(j) = m(j) = \perp$ pro každé j , podmínka v první větvi definice funkce g nikdy neplatí. Můžeme tedy usoudit, že

$$g(i, j) = \varphi_i(5).$$

Funkce g je vyčíslitelná, neboť ji lze počítat například následujícím programem, který využívá vyčíslitelnou univerzální funkci Φ pro standardní numeraci unárních vyčíslitelných funkcí.

```
begin
   $x_1 := \Phi(x_1, 5)$ 
end
```

- b) Ano, funkce h s požadovanými vlastnostmi existuje. Z odrážky a) víme, že funkce g je vyčíslitelná, a tedy $g = \varphi_e^{(2)}$ pro nějaké $e \in \mathbb{N}$. Necht' $g': \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ je funkce definovaná vztahem $g'(j, i) = g(i, j)$. Funkce g' je zřejmě vyčíslitelná, ale pro úplnost uvádíme program, který ji počítá (tentokrát je Φ univerzální funkce pro standardní numeraci binárních vyčíslitelných funkcí).

```
begin
   $x_1 := \Phi(e, x_2, x_1)$ 
end
```

Dle translačního lematu pro binární funkce existuje totálně vyčíslitelná unární funkce h taková, že $\varphi_{h(j)}(i) = g'(j, i) = g(i, j)$, což jsme měli dokázat.