

Jméno: Nesmělý Panter

UČO: 1234567

0007

líst

|

učo

1234567

body

Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

1. [3 body] Řekneme, že výroková formule φ v konjunktivní normální formě je *silně splnitelná*, pokud existuje valuace proměnných, ve které jsou pravdivé alespoň dva různé literály z každé klauzule (dva výskyty téhož literálu v jedné klauzuli nepovažujeme za různé literály).

Uvažme problém rozhodnout, zda je daná výroková formule v CNF silně splnitelná, tedy problém

$$STRONGSAT = \{\langle \varphi \rangle \mid \varphi \text{ je formule v CNF, která je silně splnitelná}\}.$$

Dokažte, že *STRONGSAT* je NP-úplný.

Příslušnost do NP. Problém *STRONGSAT* je rozhodován např. nedeterministickým Turingovým strojem, který pracuje následovně: stroj nejprve deterministicky ověří, zda vstup je kódem nějaké výrokové formule φ v CNF (to lze jistě učinit v polynomiálním čase). Pokud tomu tak není, ihned zamítne. V opačném případě nedeterministicky vybere nějakou valuaci proměnných z φ a vyhodnotí, zda jsou v této valuaci pravdivé v každé klauzuli alespoň 2 různé literály (to lze udělat v jednom průchodu přes formuli). Pokud ano, stroj akceptuje, jinak zamítá. Všechny uvedené operace lze na Turingově stroji implementovat v polynomiálním čase, tedy uvedený stroj má polynomiální časovou složitost. Je zjevné, že tento Turingův stroj akceptuje právě *STRONGSAT*.

NP-těžkost. Ukážeme, že $3SAT \leq_p STRONGSAT$. Uvažme funkci f definovanou vztahem

$$f(x) = \begin{cases} \langle y \wedge \neg y \rangle & \text{pokud } x \text{ není kódem formule v 3CNF,} \\ \langle \varphi' \rangle & \text{pokud } x = \langle \varphi \rangle \text{ a } \varphi \text{ je v 3CNF,} \end{cases}$$

kde φ' vznikne z φ přidáním literálu z do každé klauzule, přičemž z je výroková proměnná, která se nevyskytuje ve φ . Funkce f je totálně vyčíslitelná deterministickým strojem s polynomiální časovou složitostí, který funguje následovně. Stroj nejprve zkontroluje, zda vstup je kódem formule v 3CNF. Pokud není, zapíše na pásku $\langle y \wedge \neg y \rangle$. Pokud je, přidá do každé její klauzule literál z a na výstup dá výslednou zakódovanou formuli.

Zbývá ukázat, že $x \in 3SAT \iff f(x) \in STRONGSAT$. Tato ekvivalence zřejmě platí pro x , která nejsou kódy výrokových formulí v 3CNF, protože pak $x \notin 3SAT$ a $f(x) = \langle y \wedge \neg y \rangle \notin STRONGSAT$. Ve zbytku důkazu tedy předpokládejme, že $x = \langle \varphi \rangle$, kde φ je výroková formule v 3CNF.

“ \implies ” Necht $\langle \varphi \rangle \in 3SAT$, tedy existuje valuace ν splňující φ . Jinými slovy, v každé klauzuli formule φ je literál, který je ve valuaci ν pravdivý. Nyní uvažme valuaci ν' , která se na proměnných z φ chová stejně jako ν a proměnnou z zobrazí na *true*. Ve valuaci ν' jsou v každé klauzuli formule φ' pravdivé alespoň dva literály: původní literál pravdivý ve valuaci ν a přidaný literál z . Tyto literály jsou vždy různé, protože z je čerstvá proměnná. Tedy $f(\langle \varphi \rangle) = \langle \varphi' \rangle \in STRONGSAT$.

“ \impliedby ” Necht $f(\langle \varphi \rangle) = \langle \varphi' \rangle \in STRONGSAT$, tedy existuje valuace ν , ve které jsou v každé klauzuli formule φ' pravdivé alespoň dva různé literály. Jelikož jsme při konstrukci φ' do každé klauzule přidali pouze jeden literál, musí být alespoň jeden z literálů pravdivých ve valuaci ν zároveň literálem v odpovídající klauzuli původní formule φ . Stejná valuace tedy splňuje původní formuli φ a proto $\langle \varphi \rangle \in 3SAT$.