Příklad 1. Dokončete rozumně příklady z minula, v mém případě 5, 6; z příkladu 7 mi chybí poslední posloupnost, ale zjednoduším to na $(1, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots)$.

Příklad 5. Rozložte na parciální zlomky
$$\frac{5x-4}{x^2-x-2}.$$

Příklad 6. Rozviňte do mocninné řady funkci:

(1) $\frac{1}{(1-x)^2}$
(2) $\frac{5x-4}{x^2-x-2}$
(3) $\frac{x}{x+5}$
(4) $\frac{x^2+x+2}{2x^3-x^2-4x+3}$

Příklad 7. Určete vytvořující funkci posloupností:

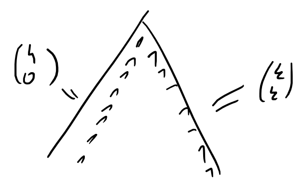
(1) $(2, 4, 6, 8, \ldots)$,
(2) $(1, 3, 5, 7, \ldots)$,
(3) $(1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots)$,
(4) $(1, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots)$.

vytv. fce $\quad (\underset{a_0}{1}, \underset{a_1}{2^2}, \underset{a_2}{3^2}, \underset{a_3}{4^2}, \underset{a_4}{\ldots}) = (a_k) = ((k+1)^2)$

$a_k = (k+1)^2$

$$f(x) = \sum_k a_k \cdot x^k = \sum_k (k+1)^2 \cdot x^k$$

zobecněná binomická věta
$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_k \binom{k+n-1}{n-1} x^k$$



spec. případy binom. věty

$$\frac{1}{1-x} = \sum_k \underbrace{\binom{k+0}{0}}_{=1} x^k = \sum_k x^k$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_k \binom{k+1}{1} x^k = \sum_k (k+1) x^k$$

$$2 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} = 2 \cdot \sum_k \binom{k+2}{2} x^k = \sum_k \underbrace{(k^2+3k+2)}_{=(k+2)(k+1)} x^k$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum (k+1)^2 x^k = \sum (k^2+2k+1) x^k = \sum \left((k^2+3k+2) - (k+1)\right) x^k$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{je hledaná vytv. fce}$$

$$f(x) = A \cdot \frac{1}{1-x} + B \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + C \cdot 2 \frac{1}{(1-x)^3}$$

$$\sum \underline{\underline{(k+1)^2}} \cdot x^k = \sum \underline{\underline{\left(A \cdot 1 + B \cdot (k+1) + C(k^2+3k+2)\right)}} x^k$$

k^2	$C \cdot k^2$	$\Rightarrow$	$C = 1$
$2k$	$B \cdot k + 3C \cdot k$		$2 = B + 3C \ldots B = -1$
1	$A + B + 2C$		$A = 0$

$$2k \qquad B\cdot k + 3C\cdot k \qquad 2 = B + 3C \; \dots \; B = -1$$

$$1 \qquad A + B + 2C \qquad A = 0$$

$$\frac{5x-4}{x^2-x-2} = \frac{5x-4}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$5x-4 = A(x+1) + B(x-2)$$

dosadíme $x=-1$, $x=2$

$$-9 = 0A - 3B \Rightarrow B = 3$$

$$6 = 3A + 0B \Rightarrow A = 2$$

$$= \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+1}$$

$x-2 = -2(-\frac{x}{2}+1)$

$$\frac{1}{1-x} = \sum x^k$$

$$\boxed{\frac{1}{1-\alpha x}} = \sum \alpha^k \cdot x^k$$

= rozvinutí do mocninné řady:

$$= (-1)\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} + 3\cdot\frac{1}{1-(-x)}$$

$$= (-1)\sum\left(\frac{1}{2}\right)^k x^k + 3\sum(-1)^k\cdot x^k$$

$$= \sum_k \underbrace{\left((-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k + 3\cdot(-1)^k\right)}_{a_k \text{ důležité pro příklady}} \cdot x^k = \sum a_k\cdot x^k$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_k \binom{k+1}{1} x^k = \sum_k (k+1)x^k$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_k \binom{k+n-1}{n-1} x^k$$

$$\frac{x}{x+5} = 1 - \frac{5}{x+5}$$

$x+5 = 5(1+\frac{x}{5})$

$$x : (x+5) = 1$$
$$\underline{-x-5}$$
$$-5$$

$$= 1 - \frac{1}{1-(-\frac{x}{5})}$$

$$[k=0] = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$= 1 - \sum\left(-\frac{1}{5}\right)^k x^k$$

$1 = \sum[k=0]\cdot x^k$

$$= \sum_k \left([k=0] - \left(-\frac{1}{5}\right)^k\right) x^k$$

$$\sum_k [k=0]x^k = 1$$

$= 1\cdot x^0 + 0\cdot x^1 + 0\cdot x^2 + \dots$

$$\sum_k [k=1]x^k = x$$

$$\sum_i [i=1]\, x^i = x$$
$$= 0\cdot x^0 + 1\cdot x^1 + 0\cdot x^2 + \dots$$

$$\frac{x^2+x+2}{2x^3-x^2-4x+3}$$

$$2x^3-x^2-4x+3 = (x-1)(2x^2+x-3) = (x-1)(x-1)(2x+3)$$

racionální kořeny $\frac{p}{q}$, kde $p \mid$ abs. člen $= 3$, $q \mid$ nejv. člen $= 2$

$$\frac{x^2+x+2}{2x^3-x^2-4x+3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{2x+3}$$
$$= \frac{A(x-1)(2x+3) + B(2x+3) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(2x+3)}$$

$$x^2+x+2 = A(x-1)(2x+3) + B(2x+3) + C(x-1)^2$$

dosadíme

$x=1$: $\quad 4 = B\cdot 5 \Rightarrow B = 4/5 = \underline{\underline{20/25}}$

$x=-3/2$: $\quad 11/4 = C\cdot 25/4 \Rightarrow C = \underline{\underline{11/25}}$

$x=0$: $\quad 2 = -3A+3B+C$

$$2 = -3A + 12/5 + 11/25$$
$$50/25 = -3A + 71/25$$
$$3A = 21/25$$
$$A = \underline{\underline{7/25}}$$

$$\frac{x^2+x+2}{2x^3-x^2-4x+3} = \frac{7/25}{x-1} + \frac{20/25}{(x-1)^2} + \frac{11/25}{2x+3}$$

$$= \frac{1}{25}\left(\frac{7}{x-1} + \frac{20}{(x-1)^2} + \frac{11}{2x+3}\right)$$

$x-1 = -1\cdot(1-x)$

$(x-1)^2 = (-1\cdot(1-x))^2 \overset{?}{=} (1-x)^2$ znaménko +

$$\frac{1}{1-\dots}$$

$$= \frac{1}{25}\left(-7\cdot\frac{1}{1-x} + 20\cdot\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{11}{3}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{2}{3}x)}\right)$$

$$= \frac{1}{25}\sum\left(-7\cdot x^k + 20\cdot\binom{k+1}{1}\cdot x^k + \frac{11}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^k\cdot x^k\right)$$

$$= \sum \underbrace{\frac{1}{25}\left(-7 + 20\cdot\binom{k+1}{1} + \frac{11}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^k\right)}_{a_k}\cdot x^k$$

Příklad 2. Najděte vzorec pro součet $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2$.

konvoluce: $a_k = k^2$

$a_0 + a_1 + \dots + a_k$ = konvoluce posl.

$\underline{a_0 \cdot b_k + a_1 \cdot b_{k-1} + \dots + a_k \cdot b_0}$ (a_k), (1)

$a(x)$, $\frac{1}{1-x} = \sum 1 \cdot x^k$

$a(x) = \sum_k a_k \cdot x^k$

$a(x) \cdot \frac{1}{1-x} = \dots$

$$\sum_k k^2 \cdot x^k = \frac{1}{1-x} - 3 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + 2 \frac{1}{(1-x)^3} = a(x)$$

$$a(x) = A \cdot \frac{1}{1-x} + B \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + C \cdot 2 \frac{1}{(1-x)^3}$$

$$\sum k^2 \cdot x^k = \sum \Big(A \cdot 1 + B \cdot (k+1) + C \underbrace{(k^2 + 3k + 2)}_{(k+2)(k+1)}\Big) x^k$$

$C = 1$
$B = -3$
$A = 1$

vytv. fce posl. $a_k = k^2$ je $\frac{1}{1-x} - 3 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + 2 \frac{1}{(1-x)^3}$

$b_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2$ je $\frac{1}{(1-x)^2} - 3 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} + 2 \frac{1}{(1-x)^4}$

$$= \sum \binom{k+1}{1} x^k - 3 \sum \binom{k+2}{2} x^k + 2 \sum \binom{k+3}{3} x^k$$

$$= \sum \underbrace{\left(\binom{k+1}{1} - 3 \binom{k+2}{2} + 2 \binom{k+3}{3} \right)}_{b_k} x^k$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = b_k = \underbrace{\binom{k+1}{1}}_{k+1} - 3 \underbrace{\binom{k+2}{2}}_{\frac{(k+2)(k+1)}{2}} + 2 \underbrace{\binom{k+3}{3}}_{\frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{6}} = \dots = \text{cca} \frac{k(k+1)(2k-1)}{6}$$

Příklad 3. Najděte vzorec pro součet $1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n$.

posl. $(a_k) = (\underset{a_0}{1}, \underset{a_1}{-2}, \underset{a_2}{3}, \underset{a_3}{-4}, \underset{a_4}{5}, \underset{a_5}{-6}, \dots) \longrightarrow a(x)$

$(b_k) =$ část. součty $\qquad b(x) = \frac{1}{1-x} \cdot a(x)$

výsledek $\longleftarrow$ rozvineme do moc. řady

$$a_k = (-1)^k \cdot (k+1) \longrightarrow a(x) = \sum (k+1)(-1)^k \cdot x^k$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{(1+x)^2}}} = \sum \binom{k+1}{1} (-x)^k$$

$$b(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\underline{\frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{(1+x)}} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}$$

$$\frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} = \left(\frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x} \right) \cdot \frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{1/4}{1-x} + \frac{1/4}{1+x} + \frac{1/2}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \sum x^k + \frac{1}{4} \sum (-1)^k \cdot x^k + \frac{1}{2} \sum \binom{k+1}{1} \cdot (-1)^k \, x^k$$

$$= \sum \left(\frac{1}{4} + \underline{\frac{1}{4} (-1)^k} + \frac{1}{2} (k+1)(-1)^k \right) \cdot x^k$$

<u>Kontrola</u>: $\frac{1}{4} \left(1 + (-1)^k (2k+3) \right)$ $\qquad k$ sudé: $\frac{k+2}{2}$

k liché: $\frac{-k-1}{2}$

Příklad 4. Pomocí vytvořující funkce vyřešte následující rekurenci:

$$a_0 = 0,$$
$$a_n = 2a_{n-1} + 3n^2 + 2n + 5, n \geq 1.$$

5

15. listopadu 2021 12:52

Příklad 5. Pomocí vytvořující funkce vyřešte následující rekurenci:

$$a_0 = 1; a_1 = 3,$$
$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, n \geq 2.$$

Příklad 6. Pomocí vytvořující funkce vyřešte následující rekurenci:

$$a_0 = -4; a_1 = -9,$$
$$a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-2} + 16n, n \geq 2.$$