Skolemizace. Důkazové systémy. Úvod do logického programování

Luboš Popelínský

E-mail: popel@fi.muni.cz
http://nlp.fi.muni.cz/uui/

Obsah:

- Skolemizace
- Axiomatické systémy
- Deduktivní systémy
- Rezoluční metoda
- Rezoluce v predikátové logice

Skolemovy normální formy. Skolemizace

- převod formulí na formule bez existenčních kvantifikátorů v jazyce, který je rozšířen o tzv. Skolemovy funkce; zachovává splnitelnost
- idea převodu: formuli $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y P(x_1, \ldots, x_n, y)$ transformujeme na $\forall x_1 \ldots \forall x_n P(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$
- příklad: mějme celá čísla s $+$. Formuli $\forall x \exists y (x + y = 0)$ převedeme na $\forall x (x + f(x) = 0)$. Interpretace f – unární funkce, která pro daný argument vrátí opačné číslo.
- Skolemova normální forma je prenexová normální forma pouze s univerzálními kvantifikátory.
- **Věta:** každou formuli A lze převést na takovou formuli A' ve Skolemově normální formě, že A je splnitelná právě když A' je splnitelná.

Algoritmus převodu do Skolemovy nf

1. převést formuli do prenexové konjunktivní nf
2. provést Skolemizaci: odstranit všechny existenční kvantifikátory a nahradit jimi vázané proměnné pomocnými Skolemovými funkcemi

- příklad 1: převeďte do Skolemovy nf formuli
  $\forall x \exists y \neg(P(x,y) \Rightarrow \forall z R(y)) \vee \neg \exists x Q(x)$
  1. $\forall x_1 \exists y \forall x_2((P(x_1,y) \vee \neg Q(x_2)) \wedge (\neg R(y) \vee \neg Q(x_2)))$
  2. $\forall x_1 \forall x_2((P(x_1,f(x_1)) \vee \neg Q(x_2)) \wedge (\neg R(f(x_1)) \vee \neg Q(x_2)))$
- příklad 2: převeďte do Skolemovy nf následující formuli v pnf
  $\forall x \exists y \forall z \exists w(P(x,y) \vee \neg Q(z,w))$
  2. $\forall x \forall z(P(x,f_1(x)) \vee \neg Q(z,f_2(x,z)))$

Herbrandova věta I

- motivace: hledáme snazší prostředky k určení, zda daná množina formulí je splnitelná
- pracujeme s množinou S formulí ve Skolemově nf (univerzální kvantifikátory se často při zápisu vynechávají), jejími konstantami (alespoň jedna, příp. přidaná mimo S), funkčními a predikátovými symboly
- Herbrandovo univerzum $U(S)$ je množina všech uzavřených termů, které lze utvořit z konstant a funkčních symbolů z S (tzv. základní termy)
  př.: pro $S = \{P(f(0))\}$ je $U(S) = \{0, f(0), f(f(0)), f(f(f(0))), \dots\}$
- Herbrandova báze $B(S)$ je množina všech atomických formulí, které lze vytvořit nad prvky $U(S)$;
  $B(S) = \{P(t_1, \dots, t_n) | t_i \in U(S), P \text{ je predik. symbol figurující v } S\}$
  př.: pro $S = \{P(f(0))\}$ je $B(S) = \{P(0), P(f(0)), P(f(f(0))), \dots\}$

Herbrandova věta II

- Herbrandova interpretace je libovolná podmnožina báze $B(S)$ zahrnující ty aplikace predikátů na prvky univerza, které jsou pravdivé
  Poznámka: s funkcemi a konstantami lze pracovat i nadále pouze na symbolické úrovni
- Herbrandův model $M(S)$ množiny S je taková Herbrandova interpretace, ve které jsou všechny formule z S pravdivé
- **Herbrandova věta:** buď existuje Herbrandův model S nebo existuje konečně mnoho uzavřených instancí prvků S, jejichž konjunkce neplatí
- slabší tvrzení: S je splnitelná právě tehdy, když existuje její Herbrandův model
- závěr: k rozhodnutí o splnitelnosti množiny již nepotřebujeme brát v úvahu všechny možné interpretace, stačí pracovat pouze se ‚symbolickými' Herbrandovými interpretacemi

Herbrandovy modely – příklady

Příklad 1: $S = \{P(0), P(s(x)) \vee \neg P(x)\}$ (předp. $\forall$ kvantifikovány)

- $U(S) = \{0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \dots\}$
  $B(S) = \{P(0), P(s(0)), P(s(s(0))), P(s(s(s(0)))), \dots\}$
  $M(S) = B(S)$ (minimální Herbrandův model je celá báze)
  poznámka: P vyjadřuje vlastnost ‚být korektní přirozené číslo' (pomocí následníků nuly)

Příklad 2: $S' = \{P(0), P(s(x)) \vee \neg P(x), R(x, s(x)) \vee \neg P(x)\}$

- $U(S') = \{0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \dots\}$ (stejné jako pro S)
  $B(S') = \{P(0), P(s(0)), P(s(s(0))), P(s(s(s(0)))), \dots,$
  $R(0,0), R(0, s(0)), R(s(0), 0), R(s(0), s(0)), \dots\}$
  $M(S') = \{P(0), P(s(0)), P(s(s(0))), P(s(s(s(0)))), \dots,$
  $R(0, s(0)), R(s(0), s(s(0))), R(s(s(0)), s(s(s(0)))) \dots\}$
  poznámka: P je stejné jako pro S, $R(x, y)$ reprezentuje binární vlastnost ‚y je následníkem x' (resp. ‚x je předchůdcem y')

Axiomatický systém pro výrokovou logiku

- jazyk: stejný jako jazyk výrokové logiky; primárně používáme systém spojek $\{\Rightarrow, \neg\}$, ostatní spojky jsou chápány jako zkrácené zápisy:
  $A \wedge B =_{df} \neg(A \Rightarrow \neg B)$, $A \vee B =_{df} \neg A \Rightarrow B$,
  $A \Leftrightarrow B =_{df} (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
- axiomy (resp. schémata axiomů; A, B, C jsou formule):
  A₁ $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
  A₂ $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
  A₃ $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- odvozovací (inferenční) pravidlo modus ponens (MP) (pravidlo odloučení): jsou-li z axiomů dokazatelné (odvoditelné) formule A a $A \Rightarrow B$, pak je dokazatelná i B. Zapisujeme též

$$\frac{A \qquad A \Rightarrow B}{B}$$

Příklad

- důkaz A: konečná posloupnost formulí, jejíž každý člen je axiom nebo důsledek MP, jehož předpoklady jsou mezi předchozími členy, a poslední člen je formule A. Je-li A dokazatelná, píšeme $\vdash A$.
- příklad: dokažte $\vdash A \Rightarrow A$ (vpravo jsou komentáře k jednotlivým krokům)

1. $\vdash A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$	$\mathbf{A_1}$
2. $\vdash (A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$	$\mathbf{A_2}$
3. $\vdash (A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$	MP(1,2)
4. $\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$	$\mathbf{A_1}$
5. $\vdash A \Rightarrow A$	MP(3,4)

Axiomatický systém predikátové logiky I

- používáme spojky $\{\Rightarrow, \neg\}$ a kvantifikátor $\forall$. Ostatní spojky jsou chápány jako zkratky uvedené ve výr. logice, resp. $\exists x A =_{df} \neg\forall x \neg A$
- axiomy pro spojky (A, B, C jsou formule) – shodné s výr. logikou:
  A1 $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
  A2 $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
  A3 $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- axiomy pro $\forall$:
  A4 $\forall x A \Rightarrow A(x/t)$
  A5 $\forall x(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \forall x B)$, A neobsahuje volně x

Axiomatický systém predikátové logiky II

- axiomy pro rovnost:

  $\mathbf{A_6}$ $x = x$

  $\mathbf{A_7}$ $(x = y) \Rightarrow (f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n))$

  $\mathbf{A_8}$ $(x = y) \Rightarrow (P(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) = P(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n))$

- odvozovací pravidla:
  - modus ponens (MP, stejné s výr. logikou): z A a $A \Rightarrow B$ odvodíme B pro libovolné formule A, B
  - generalizace (PG): z A odvodíme $\forall x A$

Axiomatický systém: příklad

Příklad: důkaz z předpokladu. Ukažte, že pokud je dokazatelná formule $A \Rightarrow B$ a proměnná x není volná v A, pak je dokazatelná i formule $A \Rightarrow \forall x B$.

1.	$\vdash A \Rightarrow B$	předpoklad
2.	$\vdash \forall x(A \Rightarrow B)$	PG(1)
3.	$\vdash \forall x(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \forall x B)$	$\mathbf{A_5}$
4.	$\vdash A \Rightarrow \forall x B$	MP(2,3)

Vlastnosti axiomatického systému

- Věta (korektnost a úplnost): A je dokazatelná právě tehdy, když je pravdivá, tj. $\vdash A \Leftrightarrow \models A$
  Důkaz: $\Rightarrow$ (korektnost): ověříme, že axiomy jsou tautologie a jsou-li předp. MP tautologie, pak i důsledek je tautologie (tabulky, věta o implikaci)
  $\Leftarrow$ (úplnost): složitější, na základě pomocných tvrzení (lemma o neutrální formuli a lemma o odvození z atomických komponent)
  Pozn.: věta vystihuje vztah mezi syntaxí a sémantikou výr. logiky
- rozhodnutelnost: neexistuje systematická procedura (jde spíše o "hádání"jednotlivých kroků důkazu), nevhodné pro strojové zpracování. Dokazování lze zjednodušit pomocí dokazatelnosti z předpokladů a syntaktické věty o dedukci ($T, A \vdash B \Leftrightarrow T \vdash A \Rightarrow B$).
- axiomy jsou nezávislé (žádný nelze odvodit ze zbývajících dvou)

Využití axiomatického systému: teorie

- teorie: množina uzavřených formulí **T**, model teorie **T**: interpretace, v níž je každá formule z **T** pravdivá

Příklad: teorie elementární aritmetiky (0, unární funkce následník s, binární $+, *$)

- **Ax$_1$** $\forall x \neg(s(x) = 0)$
  Ax$_2$ $\forall x(x + 0 = x)$
  Ax$_3$ $\forall x \forall y(x + s(y) = s(x + y))$
  Ax$_4$ $\forall x(x * 0 = 0)$
  Ax$_5$ $\forall x \forall y(x * s(y) = (x * y) + x)$
- pomocná odvozovací pravidla:
  (PS) je-li $\vdash x = y$, pak $\vdash y = x$ (symetrie $=$)
  (PT) je-li $\vdash x = y$ a $\vdash y = z$, pak $\vdash x = z$ (tranzitivita $=$)
  (PPS) je-li $\vdash x = y$, pak $\vdash s(x) = s(y)$ (přidání s)
  (PVS) je-li $\vdash s(x) = s(y)$, pak $\vdash x = y$ (vypuštění s)

Teorie: příklad důkazu

Příklad: dokažte v teorii elementární aritmetiky $s(0) + s(0) = s(s(0))$.

1.	$\vdash \forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y))$	$\mathbf{Ax_3}$
2.	$\vdash (\forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y))) \Rightarrow (\forall y (s(0) + s(y) = s(s(0) + y)))$	$\mathbf{A_4}$
3.	$\vdash \forall y (s(0) + s(y) = s(s(0) + y))$	MP(1,2)
4.	$\vdash (\forall y (s(0) + s(y) = s(s(0) + y))) \Rightarrow (s(0) + s(0) = s(s(0) + 0))$	$\mathbf{A_4}$
5.	$\vdash s(0) + s(0) = s(s(0) + 0)$	MP(3,4)
6.	$\vdash \forall x (x + 0 = x)$	$\mathbf{Ax_2}$
7.	$\vdash (\forall x (x + 0 = x)) \Rightarrow (s(0) + 0 = s(0))$	$\mathbf{A_4}$
8.	$\vdash s(0) + 0 = s(0)$	MP(6,7)
9.	$\vdash s(s(0) + 0) = s(s(0))$	PPS(8)
10.	$\vdash s(0) + s(0) = s(s(0))$	PT(5,9)

Deduktivní systémy

Axiomatický systém je příkladem deduktivního systému (nebo též formálního systému).

- postaveny výhradně na syntaktické bázi: jazyk logiky neinterpretujeme, provádíme s ním pouze syntaktické manipulace – důkazy
- cíl: získat formální teorii jako souhrn dokazatelných formulí – teorémů
- formální systém tvoří
  - jazyk + formule (symbolický jazyk výrokové logiky) – bez interpretací
  - odvozovací pravidla – operace na formulích umožňující konstrukce důkazů
  - případně axiomy – výchozí tvrzení přijímaná bez důkazu; (axiomy spolu s odvozovacími pravidly tvoří dedukční systém)
- formální systémy lze rozdělit na
  - axiomatické (méně pravidel)
  - předpokladové (méně axiomů)

Požadované vlastnosti formálních deduktivních systémů

- (požadované) vlastnosti formálních (axiomatických) systémů:
  - korektnost (bezespornost): je dána výběrem axiomů a odvozovacích pravidel; systém je korektní, nelze-li v něm zároveň odvodit tvrzení i jeho negaci. Ve sporném systému lze odvodit cokoliv. Vyžadována vždy. (Sémantická korektnost: existuje alespoň jeden model.)
  - úplnost: připojením neodvoditelné věty k úplnému systému se tento stane sporným. Nevyžadována vždy – úplné jsou pouze velmi jednoduché teorie. (Sémantická úplnost: každé tvrzení pravdivé ve std. interpretaci lze odvodit.)
  - rozhodnutelnost: existence algoritmu pro ověření dokazatelnosti libovolné formule. V axiom. systémech podmíněna úplností; zpravidla splněna pouze pro určité třídy formulí.
  - nezávislost axiomů: nezávislý axiom nelze odvodit z ostatních axiomů; závislý axiom může být vypuštěn z dané soustavy axiomů

Rezoluční metoda

Rezoluce: další formální systém

- vhodná pro strojové dokazování (Prolog)
- metoda založená na vyvracení: dokazuje se nesplnitelnost formulí
- pracujeme s formulemi v konjuktivní normální formě (též klauzulárním tvaru), ale používáme jinou notaci:
- klauzule je konečná množina literálů (chápaná jako jejich disjunkce); je pravdivá, pokud alespoň jeden prvek je pravdivý. Prázdná klauzule $\square$ je vždy nepravdivá – neobsahuje žádný pravdivý prvek.
  Příklad klauzule: $\{p, \neg q, r\}$ (tj. $p \vee \neg q \vee r$)
- formule je (ne nutně konečná) množina klauzulí (chápaná jako jejich konjunkce, tedy nkf); je pravdivá, je-li každý prvek pravdivý. Prázdná formule $\emptyset$ je vždy pravdivá – neobsahuje žádný nepravdivý prvek.
  Příklad formule: $\{\{\neg q\}, \{\neg p, q\}, \{p, q, r\}\}$ (tj. $\neg q \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee q \vee r)$)

Rezoluční pravidlo

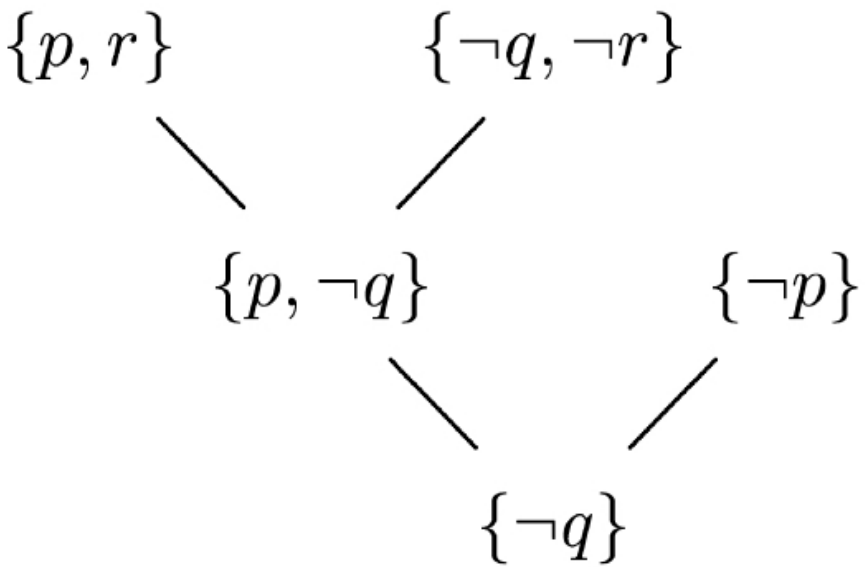
- rezoluční pravidlo: nechť $C_1 = \{p\} \sqcup C_1'$, $C_2 = \{\neg p\} \sqcup C_2'$ jsou klauzule, jejich rezolventou je $C = C_1' \cup C_2'$ (rezolvovali jsme na literálu p)
- rezoluční pravidlo zachovává splnitelnost (lib. valuace splňující C_1 a C_2 splňuje i C; klauzule C_1, C_2 označujeme jako rodiče, C jako potomka)
- rezoluční důkaz klauzule C z formule S je konečná posloupnost klauzulí $C_1, C_2, \ldots, C_n$, kde $C_n = C$ a každé C_i je buď prvkem S, nebo rezolventou klauzulí C_j, C_k pro $j, k < i$. Existuje-li tento důkaz, je C rezolučně dokazatelná z S (píšeme $S \vdash_R C$). Odvození $\square$ z S je vyvrácením S.
- příklad: dokažte $C = \{\neg q\}$ z $S = \{\{p, r\}, \{\neg q, \neg r\}, \{\neg p\}\}$
  $C_1 = \{p, r\}$ (prvek S), $C_2 = \{\neg q, \neg r\}$ (prvek S),
  $C_3 = \{p, \neg q\}$ (rezolventa C_1, C_2), $C_4 = \{\neg p\}$ (prvek S),
  $C = C_5 = \{\neg q\}$ (rezolventa C_3, C_4)

Rezoluce – stromy

- přehlednější formou rezolučních důkazů jsou stromy
- strom rezolučního důkazu C z S je binární strom T s vlastnostmi:
  - kořenem T je C
  - listy T jsou prvky S
  - libovolný vnitřní uzel C_i s bezprostředními následníky C_j, C_k je rezolventou C_j, C_k
- příklad: strom důkazu $C = \{\neg q\}$ z $S = \{\{p, r\}, \{\neg q, \neg r\}, \{\neg p\}\}$

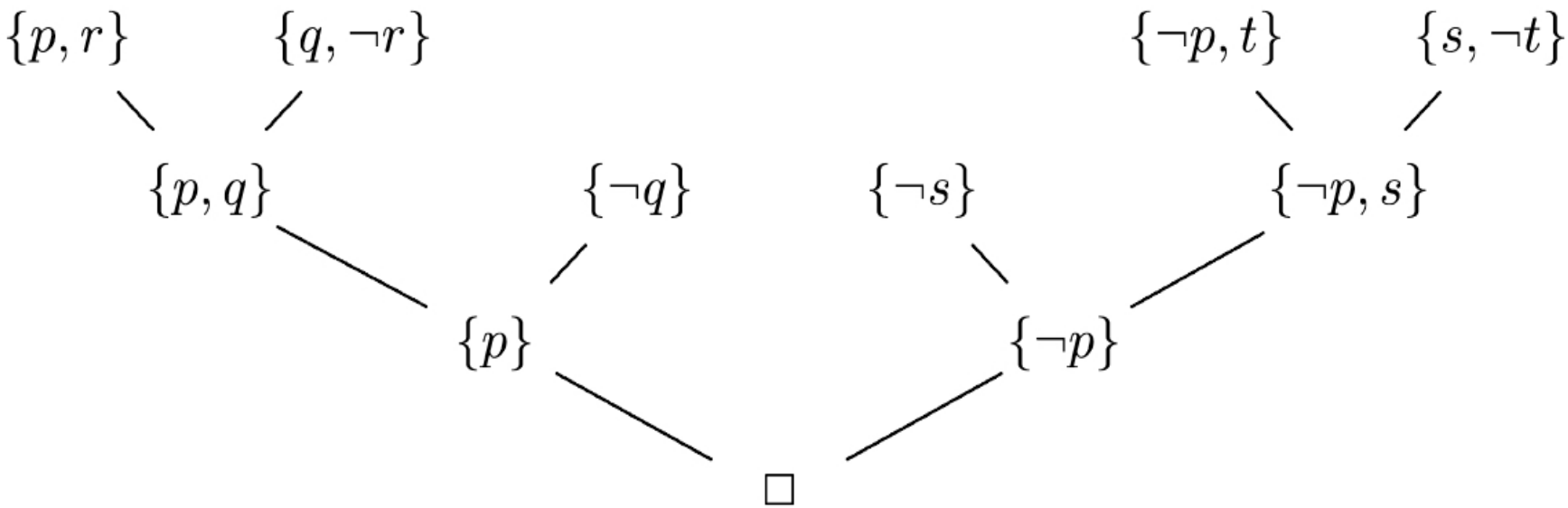
Rezoluce – stromy

- přehlednější formou rezolučních důkazů jsou stromy
- strom rezolučního důkazu C z S je binární strom T s vlastnostmi:
  - kořenem T je C
  - listy T jsou prvky S
  - libovolný vnitřní uzel C_i s bezprostředními následníky C_j, C_k je rezolventou C_j, C_k
- příklad: strom důkazu $C = \{\neg q\}$ z $S = \{\{p, r\}, \{\neg q, \neg r\}, \{\neg p\}\}$



Příklad: Rezoluční vyvrácení

- příklad: vytvořte strom rezolučního vyvrácení S (dokažte $S \vdash_R \square$), je-li
  $S = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}, \{\neg p, t\}, \{\neg s\}, \{s, \neg t\}\}$



Rezoluce – vlastnosti

- Věta (korektnost a úplnost rezoluce): rezoluční vyvrácení formule S existuje právě tehdy, když je S nesplnitelná.
- důsledek: existuje-li rezoluční strom s listy z množiny S a kořenem $\square$, pak je S nesplnitelná
- obecné schéma důkazu "formule A je log. důsledkem množiny formulí $\mathbf{T}$": vytvoříme konjunkci T' všech prvků z $\mathbf{T}$, formuli $T' \wedge \neg A$ převedeme do nkf a ukážeme $\mathrm{nkf}(T' \wedge \neg A) \vdash_R \square$
- výhody pro strojové zpracování: systematické hledání důkazu, práce s jednoduchou datovou strukturou, jediné odvozovací pravidlo
- problém: strategie generování rezolvent – prohledávaný prostor může být příliš velký; př.: $\{\{p\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q, r\}, \{\neg p, \neg r\}, \{r\}\}$ – postup, kdy rezolvujeme 2. a 3. klauzuli na p a výsledek poté se 4. na r, k důkazu nevede

Zjemnění rezoluce

- snaha omezit prohledávaný prostor
  - ukončením prohledávání neperspektivních cest
  - určením pořadí při procházení alternativních cest
- = další podmínky na rodičovské klauzule nebo rezolventu v definici rezoluce
- každé omezení rezolučního pravidla je korektní, ne každé zachovává úplnost.

Příklady možných zjemnění

- vyloučení klauzulí s literálem, který je ve formuli S pouze v jedné paritě
- T-rezoluce: žádná z rodičovských klauzulí není tautologie.
  tautologie obsahuje týž literál v obou paritách např. $\{p, \neg q, \neg p, r\}$
- nechť $\mathcal{A}$ je libovolná interpretace, $\mathcal{A}$-rezoluce (sémantická rezoluce) je rezoluce, kde alespoň jedna z rodičovských klauzulí je v $\mathcal{A}$ nepravdivá.
  (Budou-li rodiče v dané valuaci pravdiví, bude v ní pravdivý i potomek – touto cestou k nesplnitelnosti nedojdeme. $\mathcal{A}$-rezoluce je korektní a úplná.)

Unifikace – motivace

- směřujeme k rezoluci v predikátové logice:
  - formule umíme reprezentovat v konjunktivní pnf odpovídající klauzulární formě ($\forall$ nepíšeme, ale předpokládáme univerzální kvantifikaci všech proměnných)
  - literály nyní představují atomické formule a jejich negace
  - zůstává jediný problém: jak instanciovat proměnné, aby bylo možné použít rezoluční pravidlo
- příklad: mějme klauzule $C_1 = \{P(f(x)), \neg Q(a, x)\}$ a $C_2 = \{\neg P(f(g(a)))\}$; nahradíme-li x termem $g(a)$, získáme rezolventu $\{\neg Q(a, g(a))\}$
  poznámka: C_1 odpovídá formuli $\forall x(P(f(x)) \vee \neg Q(a, x))$, takže můžeme použít libovolnou instanci
- obecně řeší uvedený problém se substitucemi proměnných unifikace

Substituce

- konečná substituce ϕ je konečná množina $\{x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots, x_n/t_n\}$, kde všechna x_i jsou vzájemně různé proměnné a každé t_i je term různý od x_i. Jsou-li všechna t_i uzavřené termy, jedná se o uzavřenou substituci. Pokud jsou t_i proměnné, označujeme ϕ jako přejmenování proměnných.
- označme libovolný term nebo literál jako výraz E; pak $E\phi$ je výsledek nahrazení všech výskytů všech x_i odpovídajícími termy t_i (obdobně pro množiny výrazů)
- poznámka: substituce proměnných probíhají paralelně, ne postupně
- příklad:
  $S = \{f(x, g(y)), \neg P(y, x), Q(y, z, a)\}$
  $\phi = \{x/h(y), y/g(z), z/c\}$
  $S\phi = \{f(h(y), g(g(z))), \neg P(g(z), h(y)), Q(g(z), c, a)\}$

Kompozice substitucí

- kompozice substitucí
  $\phi = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ a $\psi = \{y_1/s_1, \ldots, y_m/s_m\}$ je množina
  $\phi\psi = \{x_1/t_1\psi, \ldots, x_n/t_n\psi, y_1/s_1, \ldots, y_m/s_m\}$ beze všech $x_i/t_i\psi$, pro která $x_i = t_i\psi$, a všech $y_j/s_j, y_j \in \{x_1, \ldots, x_n\}$
- pro prázdnou substituci ϵ a libovolnou substituci ϕ platí $\phi\epsilon = \epsilon\phi = \phi$
- pro libovolný výraz E a substituce ϕ, ψ, σ platí $(E\phi)\psi = E(\phi\psi)$ a $(\phi\psi)\sigma = \phi(\psi\sigma)$
- příklad:
  $S = \{f(x, g(y)), \neg P(y, x), Q(y, z, a)\}$
  $\phi = \{x/h(y), y/w, z/g(w, y)\}$, $\psi = \{x/a, y/f(b), w/y\}$
  $\phi\psi = \{x/h(f(b)), z/g(y, f(b)), w/y\}$
  $S\phi = \{f(h(y), g(w)), \neg P(w, h(y)), Q(w, g(w, y), a)\}$
  $S(\phi\psi) = (S\phi)\psi =$
  $\{f(h(f(b)), g(y)), \neg P(y, h(f(b))), Q(y, g(y, f(b)), a)\}$

Unifikace

- substituci ϕ nazveme unifikátorem množiny $S = \{E_1, \ldots, E_2\}$, pokud $E_1\phi = E_2\phi = \cdots = E_n\phi$, tedy v případě, že $S\phi$ má jediný prvek. Existuje-li unifikátor množiny, označíme ji jako unifikovatelnou.
- příklady:
  1. $\{P(x,a), P(b,c)\}, \{P(f(x),z), P(a,w)\}, \{P(x,w), \neg P(a,w)\}$, $\{P(x,y,z), P(a,b)\}, \{R(x), P(x)\}$ nejsou unifikovatelné
  2. unifikátorem $\{P(x,c), P(b,c)\}$ je $\phi = \{x/b\}$; žádný jiný neexistuje
  3. unifikátorem $\{P(f(x),y), P(f(a),w)\}$ může být $\phi = \{x/a, y/w\}$, ale také $\psi = \{x/a, y/a, w/a\}$, $\sigma = \{x/a, y/b, w/b\}$ atd.
- unifikátor ϕ množiny S je nejobecnějším unifikátorem (mgu) S, pokud pro libovolný unifikátor ψ množiny S existuje substituce λ taková, že $\phi\lambda = \psi$
- příklad: v bodu 3. předchozího příkladu je mgu ϕ, odpovídající substituce λ pro unifikátory ψ resp. σ je $\{w/a\}$ resp. $\{w/b\}$

Rozdíl mezi výrazy

- poznámka: pro unifikovatelné množiny existuje jediný mgu (až na přejmenování proměnných)
- mějme množinu S výrazů. Najdeme první (nejlevější) pozici, na které nemají všechny prvky S stejný symbol. Rozdíl $D(S)$ mezi výrazy pak definujeme jako množinu podvýrazů všech $E \in S$ začínajících na této pozici.
  Poznámka: každý unifikátor S nutně unifikuje i $D(S)$.
- příklady:
  - $S_1 = \{f(\mathbf{x}, g(x)), f(\mathbf{h}(y), g(h(z))\}$
    $D(S_1) = \{x, h(y)\}$
    $T_1 = S_1\{x/h(y)\} = \{f(h(y), g(h(\mathbf{y}))), f(h(y), g(h(\mathbf{z}))\}$
    $D(T_1) = \{y, z\}$
  - $S_2 = \{f(\mathbf{h}(x), g(x)), f(\mathbf{g}(x), f(x))\}$
    $D(S_2) = \{h(x), g(x)\}$

Unifikační algoritmus

unifikační algoritmus pro množinu výrazů S

- krok 0: $S_0 := S, \phi_0 := \epsilon$
- krok $k+1$:
  - je-li S_k jednoprvková, ukonči algoritmus s výsledkem $mgu(S) = \phi_0\phi_1\phi_2 \ldots \phi_k$
  - jinak, pokud v $D(S_k)$ není proměnná v a term t, který ji neobsahuje, ukonči algoritmus s výsledkem neexistuje $mgu(S)$
  - jinak vyber takovou proměnnou v a term t, který neobsahuje v, $\phi_{k+1} := \{v/t\}$, $S_{k+1} := S_k\phi_{k+1}$ a pokračuj krokem $k+2$

Algoritmus skončí korektně pro libovolnou množinu výrazů S.

Unifikace – příklad

Najděte nejobecnější unifikátor množiny
$S = \{P(f(y, g(z)), h(b)), P(f(h(w), g(a)), x), P(f(h(b), g(z)), y)\}$

1. $S_0 = S$ není jednoprvková; $D(S_0) = \{y, h(w), h(b)\}$, vyberme ze dvou možností $\phi_1 = \{y/h(w)\}$, $S_1 = S_0\phi_1 = \{P(f(h(w), g(z)), h(b)), P(f(h(w), g(a)), x), P(f(h(b), g(z)), h(w))\}$
2. $D(S_1) = \{w, b\}, \phi_2 = \{w/b\}, S_2 = S_1\phi_2 = \{P(f(h(b), g(z)), h(b)), P(f(h(b), g(a)), x), P(f(h(b), g(z)), h(b))\}$
3. $D(S_2) = \{z, a\}, \phi_3 = \{z/a\}, S_3 = S_2\phi_3 = \{P(f(h(b), g(a)), h(b)), P(f(h(b), g(a)), x), P(f(h(b), g(a)), h(b))\}$
4. $D(S_3) = \{h(b), x\}, \phi_4 = \{x/h(b)\}, S_4 = S_3\phi_4 = \{P(f(h(b), g(a)), h(b)), P(f(h(b), g(a)), h(b)), P(f(h(b), g(a)), h(b))\}$
5. $mgu(S) = \{y/h(w)\}\{w/b\}\{z/a\}\{x/h(b)\} = \{y/h(b), w/b, z/a, x/h(b)\}$

Rezoluce v predikátové logice

- metoda založená na vyvracení, pracujeme s formulemi ve Skolemově normální formě, kvantifikátory nepíšeme
- jako ve výrokové logice: formuli $\forall x \forall y((P(x, f(x)) \vee \neg Q(y)) \wedge (\neg R(f(x)) \vee \neg Q(y)))$ reprezentujeme jako $\{\{P(x, f(x)), \neg Q(y)\}, \{\neg R(f(x)), \neg Q(y)\}\}$

Standardizace proměnných

- proměnné chápeme jako lokální v dané klauzuli (pozn.: $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)) \Leftrightarrow (\forall x A(x) \wedge \forall y B(y))$)
- mezi stejnými proměnnými v různých klauzulích není žádná vazba
- standardizace proměnných: přejmenujeme proměnné v různých klauzulích tak, aby v nich žádné stejně pojmenované proměnné nevystupovaly
- standardizace proměnných je nezbytná, příklad: $\{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$ je nesplnitelná $\Leftrightarrow$ bez přejmenování $P(x)$ a $P(f(x))$ nezunifikujeme $\Leftrightarrow$ a bez unifikace nemůžeme rezolvovat

Rezoluční pravidlo pro predikátovou logiku

- rezoluční pravidlo pro predikátovou logiku: mějme klauzule C_1 a C_2 bez společných proměnných (po případném přejmenování) ve tvaru $C_1 = C_1' \sqcup \{P(\vec{x}_1), \ldots, P(\vec{x}_n)\}$, $C_2 = C_2' \sqcup \{\neg P(\vec{y}_1), \ldots, \neg P(\vec{y}_m)\}$. Je-li ϕ mgu množiny $\{P(\vec{x}_1), \ldots, P(\vec{x}_n), P(\vec{y}_1), \ldots, P(\vec{y}_m)\}$, pak rezolventou C_1 a C_2 je $C_1'\phi \cup C_2'\phi$.
- rezoluční důkazy a rezoluční vyvrácení definujeme stejně jako ve výrokové logice, pouze používáme rezoluční pravidlo pro predikátovou logiku:
  - rezoluční důkaz C z S je binární strom s listy z S a kořenem C, jehož každý vnitřní uzel je rezolventou svých bezprostředních následníků,
  - rezoluční vyvrácení S je rezoluční důkaz $\square$ z S

Rezolventa – příklady I

Př. 1: rezolvujeme klauzule $\{P(x, a)\}$ a $\{\neg P(x, x)\}$

- přejmenujeme proměnné např. v první klauzuli: $\{P(x_1, a)\}$
- $mgu(\{P(x_1, a), P(x, x)\}) = \{x_1/a, x/a\}$
- rezolventa $\square$

Př. 2: rezolvujeme klauzule $\{P(x, y), \neg R(x)\}$ a $\{\neg P(a, b)\}$

- $mgu(\{P(x, y), P(a, b)\}) = \{x/a, y/b\}$
- aplikujeme mgu na $\{\neg R(x)\}$
- rezolventa $\{\neg R(a)\}$

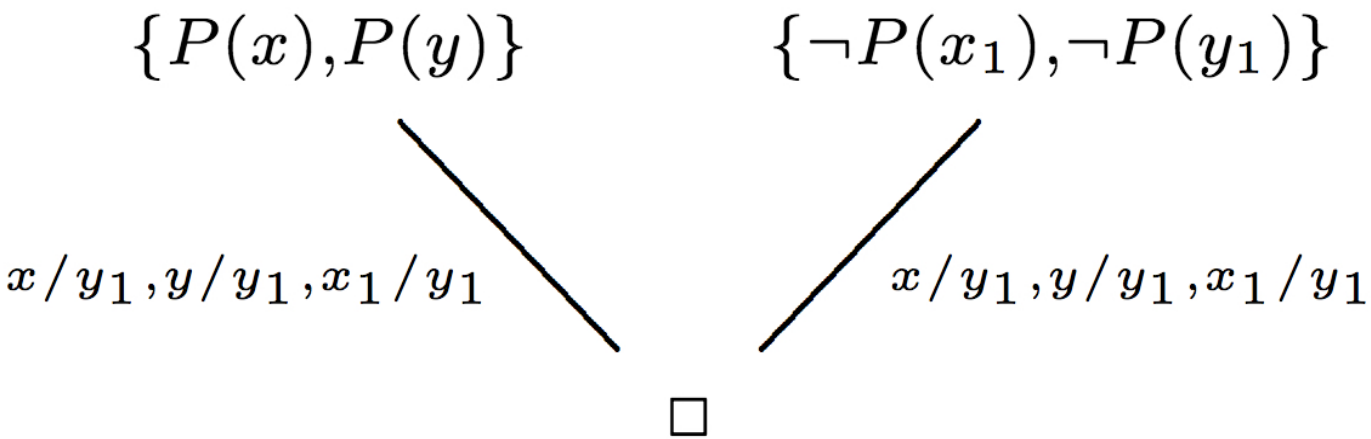
Rezolventa – příklady II

Př. 3: rezolvujeme klauzule $C_1 = \{Q(x), \neg R(y), P(x, y), P(f(z), f(z))\}$ a $C_2 = \{\neg N(u), \neg R(w), \neg P(f(a), f(a)), \neg P(f(w), f(w))\}$

- vybereme množinu literálů, na kterých budeme rezolvovat $\{P(x, y), P(f(z), f(z)), P(f(a), f(a)), P(f(w), f(w))\}$
- její mgu $\phi = \{x/f(a), y/f(a), z/a, w/a\}$
- $C_1' = \{Q(x), \neg R(y)\}$, $C_1'\phi = \{Q(f(a)), \neg R(f(a))\}$
- $C_2' = \{\neg N(u), \neg R(w)\}$, $C_2'\phi = \{\neg N(u), \neg R(a)\}$
- výsledná rezolventa $C_1'\phi \cup C_2'\phi = \{Q(f(a)), \neg R(f(a)), \neg N(u), \neg R(a)\}$

Rezoluční důkazy

- obecné schméma důkazu ‚A je důsledkem množiny formulí $\mathbf{T}$‘: všechny prvky $\mathbf{T}$ a $\neg A$ převedeme do klauzulární formy, dokazujeme nesplnitelnost jejich sjednocení
- poznámka: při jednom rezolučním kroku musíme být schopni odstranit několik literálů zároveň (pokud bychom v následujícím příkladu rezolvovali vždy pouze na jediném literálu, množinu rezolučně nevyvrátíme)
- příklad: ukažte rezoluční vyvrácení $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(x_1), \neg P(y_1)\}\}$



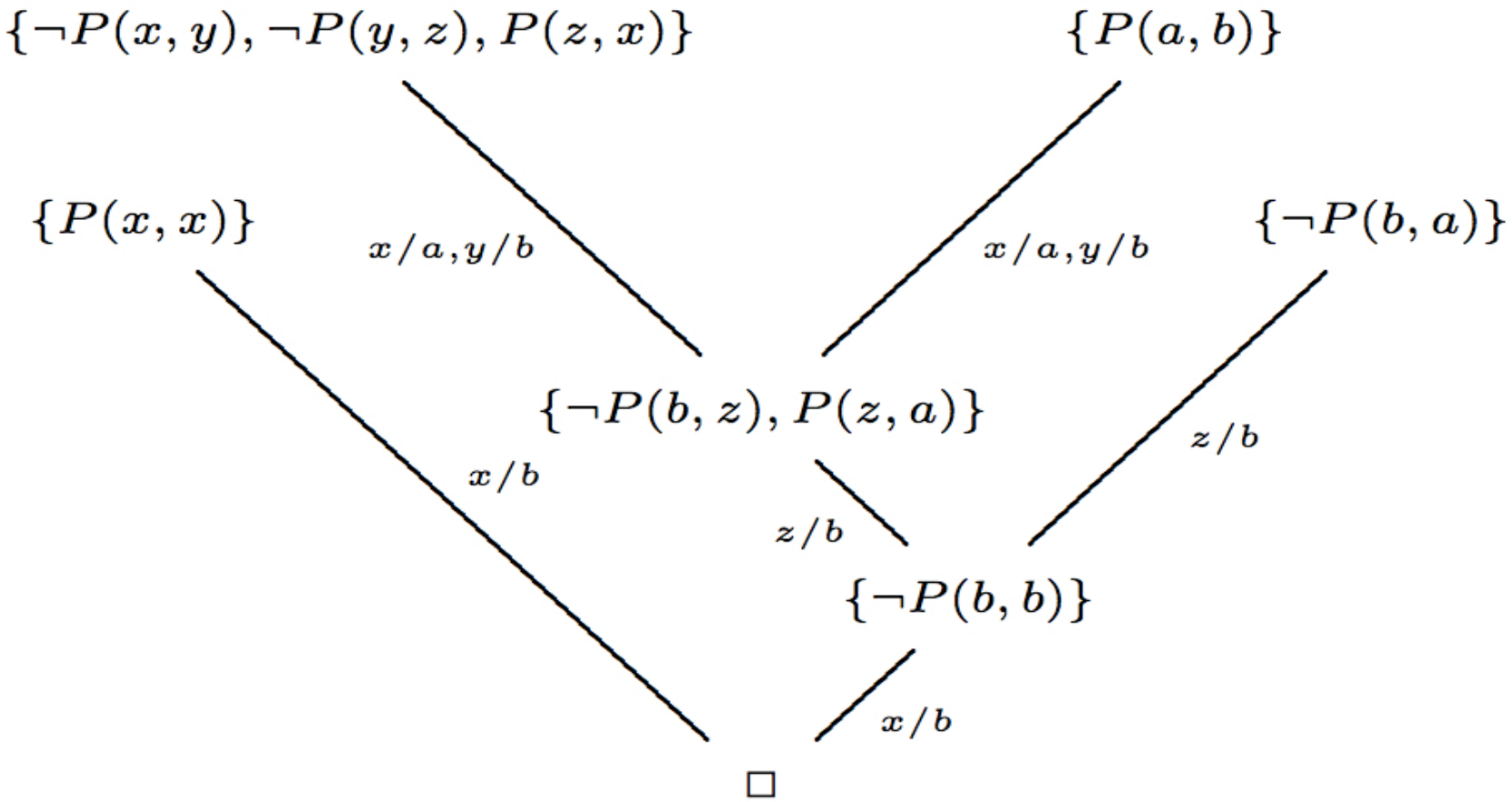
Rezoluční důkaz – příklad I

Z předpokladu reflexivity $\forall x P(x,x)$ a vlastnosti $\forall x \forall y \forall z((P(x,y) \wedge P(y,z)) \Rightarrow P(z,x))$ dokažte symetrii $\forall x \forall y (P(x,y) \Rightarrow P(y,x))$.

- převedeme předpoklady do klauzulárního tvaru:
  $S_1 = \{\{P(x,x)\}\}$
  $S_2 = \{\{\neg P(x,y), \neg P(y,z), P(z,x)\}\}$
- dokazovanou formuli negujeme:
  $\exists x \exists y (P(x,y) \wedge \neg P(y,x))$,
  převedeme do klauzulárního tvaru (přes Skolemovu nf):
  $P(a,b) \wedge \neg P(b,a)$
  $S = \{\{P(a,b)\}, \{\neg P(b,a)\}\}$
- dokazujeme nesplnitelnost $S_1 \cup S_2 \cup S$

Rezoluční důkaz – příklad II

- dokazujeme nesplnitelnost množiny klauzulí
  $\{\{P(x,x)\},\{\neg P(x,y),\neg P(y,z),P(z,x)\},\{P(a,b)\},\{\neg P(b,a)\}\}$
- strom rezolučního vyvrácení (jeden z možných):

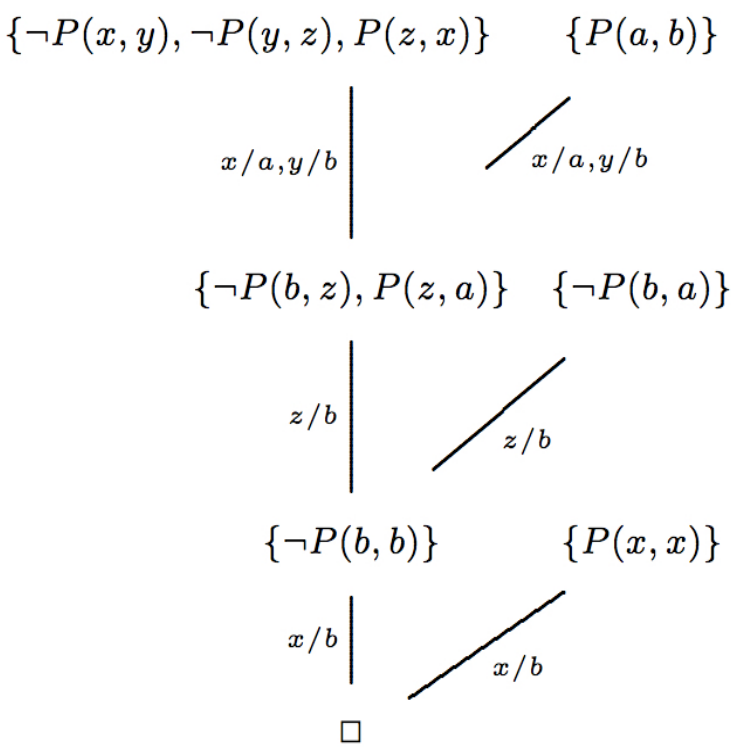


Rezoluce – vlastnosti

- stejně jako ve výrokové logice je rezoluce v predikátové logice korektní a úplná
- stejný problém jako ve výrokové logice: strategie generování rezolvent (příliš velký prohledávaný prostor)
- lze použít všechny metody zjemnění uvedené pro výrokovou logiku (T-rezoluce, sémantická rezoluce atd.)
- uvedeme pouze příklady variant rezoluce postupně směřujících k SLD-rezoluci (používané též v Prologu)

Lineární rezoluce

- lineární struktura důkazu, rezolvujeme vždy předchozí rezolventu s klauzulí z vyvracené množiny nebo dříve odvozenou rezolventou; korektní a úplná
- příklad: lineární rezoluční vyvrácení množiny $\{\{P(x,x)\},\{\neg P(x,y),\neg P(y,z),P(z,x)\},\{P(a,b)\},\{\neg P(b,a)\}\}$



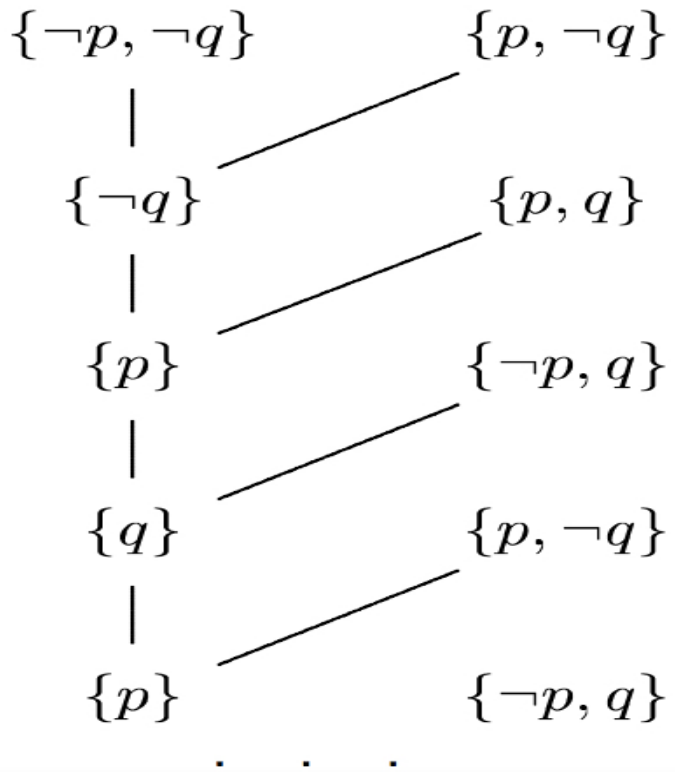
Hornovy klauzule

- omezení na určitý typ klauzulí používaných v programovacím jazyce Prolog
- Hornova klauzule je klauzule s nejvýše jedním pozitivním literálem.
  Příklad: $C = \{p, \neg q, \neg r\}$
  Běžný zápis ve výrokové logice $p \vee \neg q \vee \neg r$ lze ekvivalentními úpravami převést na $p \vee \neg(q \wedge r)$ a dále na $p \Leftarrow q \wedge r$, což v Prologu zapisujeme `p :- q, r.`
- typy Hornových klauzulí:
  – programové s právě jedním pozitivním literálem dále dělíme na
  * fakta bez negativních lit. (př.: $\{p\}$, v Prologu `p.`)
  * pravidla s alespoň jedním negativním lit. (př.: $\{p, \neg q\}$, `p :- q.`)
  – cíle bez pozitivního literálu (př.: $\{\neg p\}$, `:- p.` resp. `?- p.`)
- Každá nesplnitelná množina neprázdných Hornových klauzulí musí obsahovat alespoň jeden fakt a alespoň jeden cíl.

LI-rezoluce a LD-rezoluce

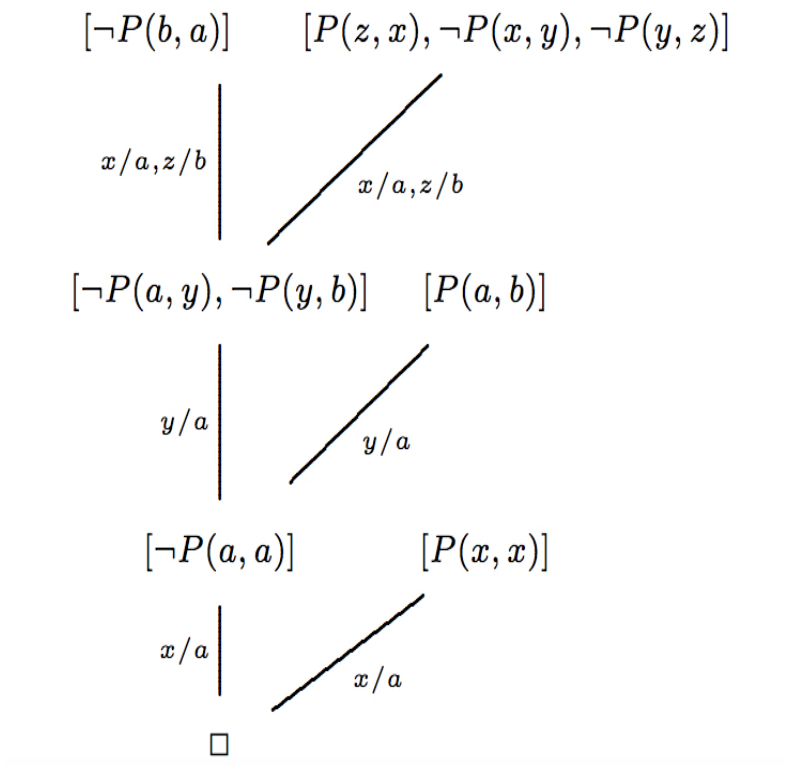
- LI-rezoluce - lineární rezoluce začínající cílovou klauzulí (žádný pozitivní literál), rezolvujeme vždy předchozí rezolventu (výhradně) s klauzulí z vyvracené množiny. Korektní, obecně není úplná; úplná pro Hornovy klauzule.
- LD-rezoluce vychází z LI-rezoluce, směřujeme k implementaci
- pracujeme výhradně s Hornovými klauzulemi (nejvýše jeden pozitivní literál)
- klauzule nahradíme uspořádanými klauzulemi; změna notace z $\{P(x), \neg R(x, f(y)), \neg Q(a)\}$ na $[P(x), \neg R(x, f(y)), \neg Q(a)]$
- rezoluce pro uspořádané klauzule v predikátové logice: mějme uspořádané klauzule bez společných proměnných (po případném přejmenování)
  $G = [\neg A_1, \neg A_2, \ldots, \neg A_n]$ a
  $H = [B_0, \neg B_1, \neg B_2, \ldots, \neg B_m]$,
  rezolventou G a H pro $\phi = mgu(B_0, A_i)$ bude uspořádaná klauzule
  $[\neg A_1\phi, \neg A_2\phi, \ldots, \neg A_{i-1}\phi, \neg B_1\phi, \neg B_2\phi, \ldots, \neg B_m\phi, \neg A_{i+1}\phi, \ldots, \neg A_n\phi]$

Neúplnost LI-rezoluce



LD-rezoluce: příklad

- LD-rezoluční vyvrácení množiny uspořádaných klauzulí
  $\{[P(x,x)], [P(z,x), \neg P(x,y), \neg P(y,z)], [P(a,b)], [\neg P(b,a)]\}$

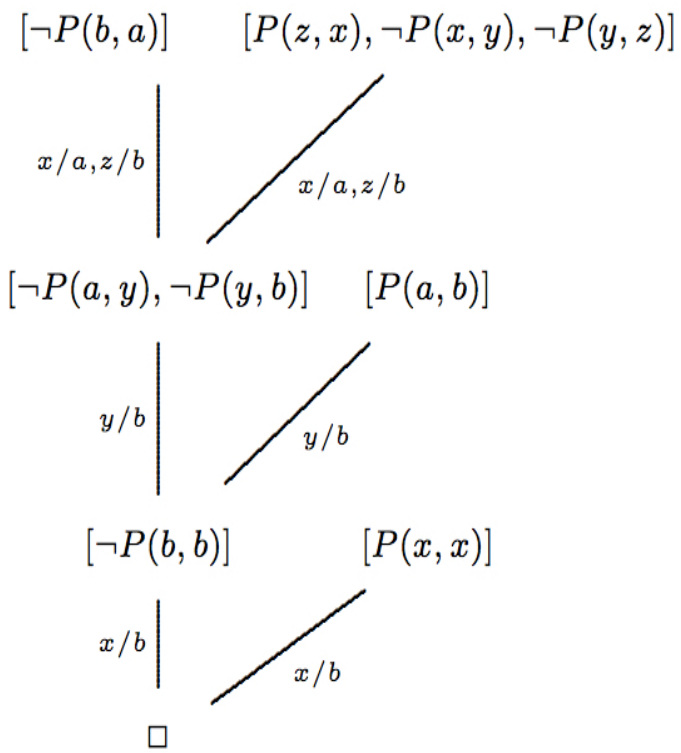


SLD-rezoluce

- pomocí selekčního pravidla algoritmizuje výběr literálu z cílové klauzule, na kterém se bude rezolvovat
- SLD-rezoluce (s libovolným selekčním pravidlem) je korektní a úplná pro Hornovy klauzule
- budeme používat selekční pravidlo, které vybírá nejlevější literál
- generování rezolvent pro uvedené pravidlo:
  $G = [\neg A_1, \neg A_2, \ldots, \neg A_n]$,
  $H = [B_0, \neg B_1, \neg B_2, \ldots, \neg B_m]$,
  rezolventou G a H pro $\phi = mgu(B_0, A_1)$ je
  $[\neg B_1\phi, \neg B_2\phi, \ldots, \neg B_m\phi, \neg A_2\phi, \ldots, \neg A_n\phi]$

SLD-rezoluce: příklad

- příklad: SLD-rezoluční vyvrácení se zvoleným selekčním pravidlem (vybírajícím vždy nejlevější literál)



- srovnání s LD-rezolucí: ve druhém kroku musíme rezolvovat na $\neg P(a, y)$ (v LD-rezoluci bylo možné vybrat libovolný z literálů $\neg P(a, y), \neg P(y, b)$)

SLD-rezoluce: význam

- máme množinu programových klauzulí P a cílovou klauzuli $G = [\neg A_1(\vec{x}), \ldots, \neg A_n(\vec{x})]$
- dokazujeme nesplnitelnost $P \cup \{G\}$, tj. $P \wedge \forall \vec{x}(\neg A_1(\vec{x}) \vee \ldots \vee \neg A_n(\vec{x}))$
- uvedená nesplnitelnost je ekvivalentní $P \vdash \neg G$, tj. $P \vdash \exists \vec{x}(A_1(\vec{x}) \wedge \ldots \wedge A_n(\vec{x}))$
- zadáním cíle G tedy chceme zjistit, zda existují nějaké objekty (případně jaké), které na základě P splňují formuli $A_1(\vec{x}) \wedge \ldots \wedge A_n(\vec{x})$
- aplikujeme-li kompozici všech mgu postupně použitých při SLD-odvození na jednotlivé proměnné vektoru $\vec{x}$, získáme konkrétní příklady zmíněných objektů (termů) splňujících danou formuli

SLD-stromy

Prostor všech možných SLD-derivací při vyhodnocování daného cíle G pro program P dokážeme zachytit SLD-stromem.

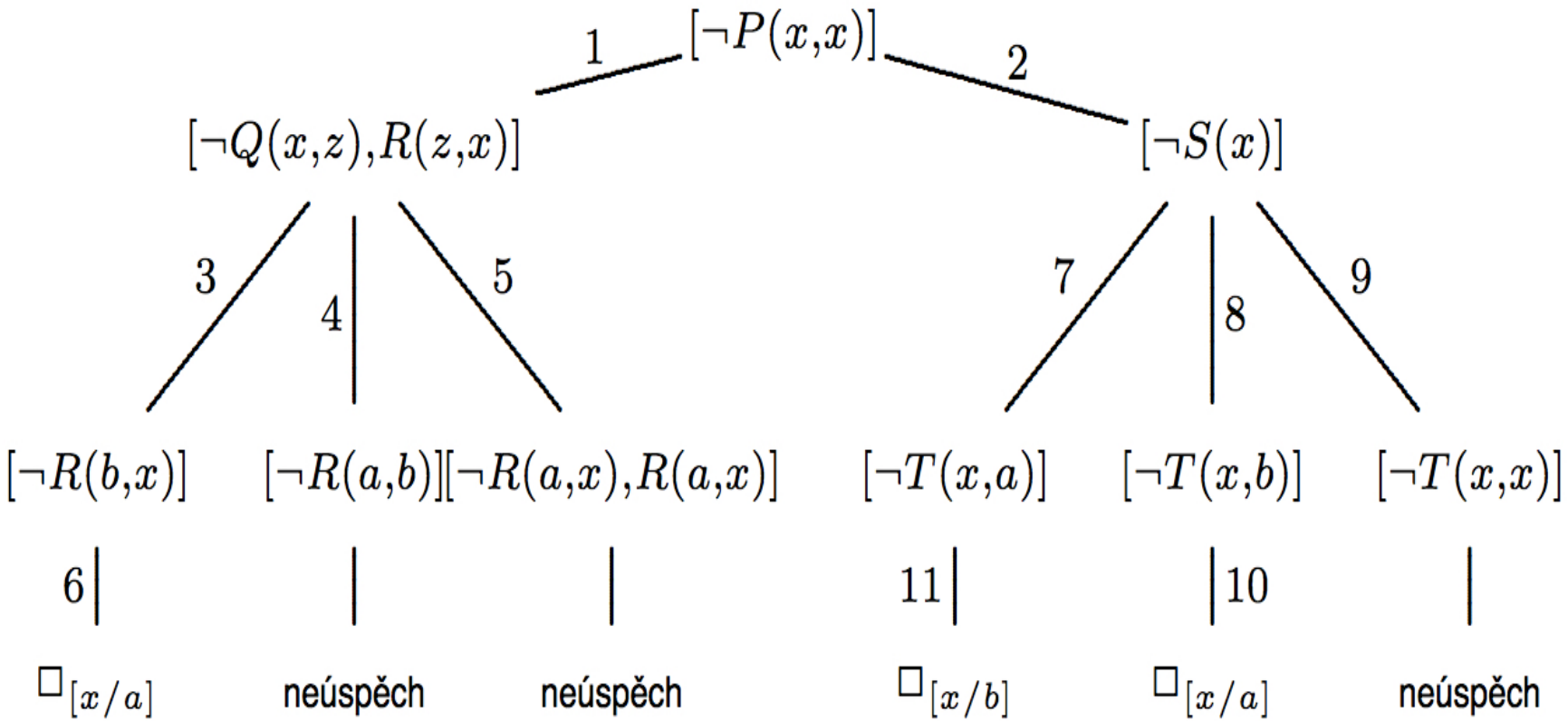
Příklad:

1. $[P(x,y),\neg Q(x,z),\neg R(z,y)]$
2. $[P(x,x),\neg S(x)]$
3. $[Q(x,b)]$
4. $[Q(b,a)]$
5. $[Q(x,a),\neg R(a,x)]$
6. $[R(b,a)]$
7. $[S(x),\neg T(x,a)]$
8. $[S(x),\neg T(x,b)]$
9. $[S(x),\neg T(x,x)]$
10. $[T(a,b)]$
11. $[T(b,a)]$

cíl: $[\neg P(x,x)]$

Na následujícím slidu číslo hrany odpovídá pořadovému číslu klauzule, která je druhým rodičem.

SLD-stromy


[¬P(x,x)]
1
2
[¬Q(x,z),R(z,x)]
[¬S(x)]
3
4
5
7
8
9
[¬R(b,x)]
[¬R(a,b)]
[¬R(a,x),R(a,x)]
[¬T(x,a)]
[¬T(x,b)]
[¬T(x,x)]
6
11
10
□ [x/a]
neúspěch
neúspěch
□ [x/b]
□ [x/a]
neúspěch

Logické programování

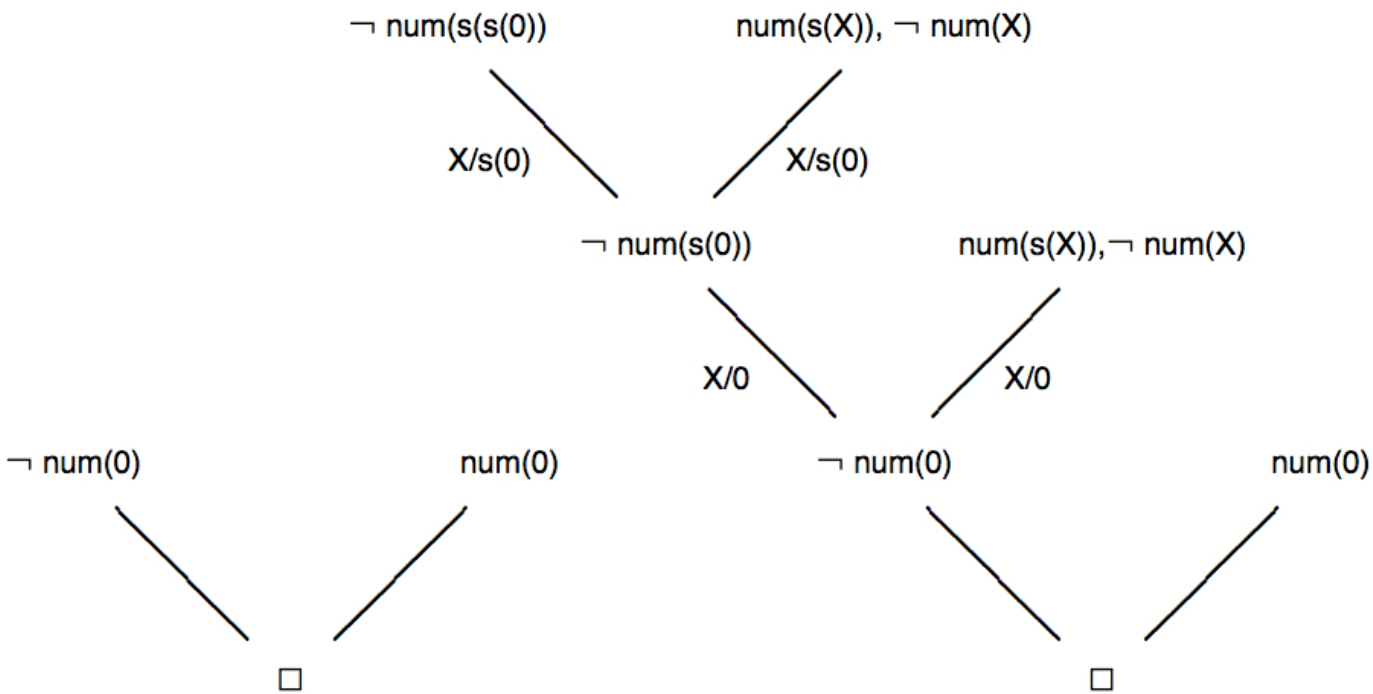
- strategie prohledávání stavového prostoru (SLD-stromu) do hloubky
- výběr programových klauzulí shora dolů
- výběr podcílů zleva doprava (viz selekční pravidlo v SLD rezoluci)
- silně využívá rekurzi
- historie: 70. l. 20. stol. – Colmerauer, Kowalski; D.H.D. Warren (WAM)
- jazyk Prolog

SLD-odvození pro logický program

Přirozená čísla s nulou $0 \in N \wedge \forall X : ((X + 1) \in N \Leftarrow X \in N)$

$+ 1 \rightarrow$ s()

natural0(0).
natural0(s(X)) :- natural(X).



Příklad: Sčítání dvou čísel

X + Y = Z

$\forall X : X + 0 = X$
$\forall X \forall Y \forall Z : X + (Y + 1) = (Z + 1) \Leftarrow X + Y = Z$

Peanova aritmetika: 1 = s(0), 2 = s(s(0)), s(Y) odpovídá Y + 1

```
plus1(X,0,X).
plus1(X,s(Y),s(Z)) :- plus1(X,Y,Z).
```