Dekompozice problému, AND/OR grafy, problémy s omezujícími podmínkami

Aleš Horák

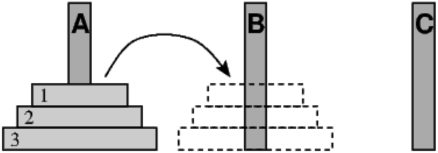
E-mail: hales@fi.muni.cz
http://nlp.fi.muni.cz/uui/

Obsah:

- Dekompozice a AND/OR grafy
- Prohledávání AND/OR grafů
- Problémy s omezujícími podmínkami
- CLP – Constraint Logic Programming

Příklad – Hanojské věže

- máme tři tyče: **A**, **B** a **C**.
- na tyči **A** je (podle velikosti) n kotoučů.
- úkol: přeskládat z **A** pomocí **C** na tyč **B** (zaps. $n(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$) bez porušení uspořádání

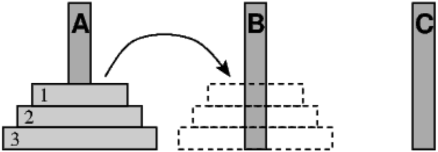


bit.ly/uuihanoi1 (Tower3 je zde cíl)

SliDo

Příklad – Hanojské věže

- máme tři tyče: **A**, **B** a **C**.
- na tyči **A** je (podle velikosti) n kotoučů.
- úkol: přeskládat z **A** pomocí **C** na tyč **B** (zaps. $n(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$) bez porušení uspořádání

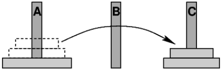


bit.ly/uuihanoi1 (Tower3 je zde cíl)

SliDo

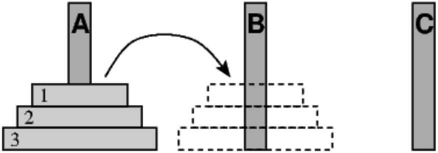
Můžeme rozložit na fáze:

1. přeskládat $n - 1$ kotoučů z **A** pomocí **B** na **C**.



Příklad – Hanojské věže

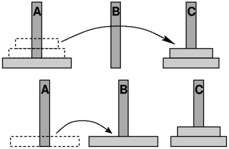
- máme tři tyče: **A**, **B** a **C**.
- na tyči **A** je (podle velikosti) n kotoučů.
- úkol: přeskládat z **A** pomocí **C** na tyč **B** (zaps. $n(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$) bez porušení uspořádání



bit.ly/uuihanoi1 (Tower3 je zde cíl)
SliDo

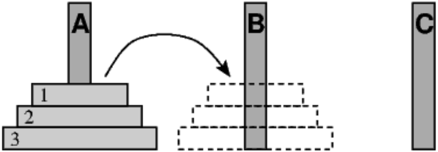
Můžeme rozložit na fáze:

1. přeskládat $n - 1$ kotoučů z **A** pomocí **B** na **C**.
2. přeložit 1 kotouč z **A** na **B**



Příklad – Hanojské věže

- máme tři tyče: **A**, **B** a **C**.
- na tyči **A** je (podle velikosti) n kotoučů.
- úkol: přeskládat z **A** pomocí **C** na tyč **B** (zaps. $n(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$) bez porušení uspořádání

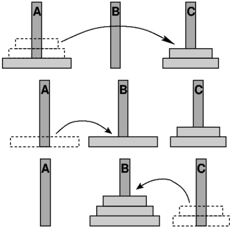


bit.ly/uuihanoi1 (Tower3 je zde cíl)

SliDo

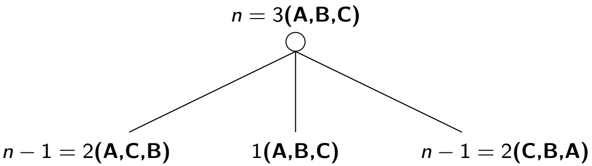
Můžeme rozložit na fáze:

1. přeskládat $n-1$ kotoučů z **A** pomocí **B** na **C**.
2. přeložit 1 kotouč z **A** na **B**
3. přeskládat $n-1$ kotoučů z **C** pomocí **A** na **B**



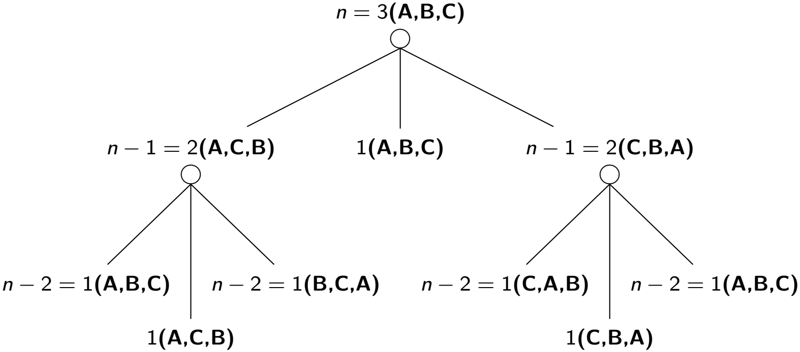
Příklad – Hanojské věže – pokrač.

schéma celého řešení pro $n = 3$:



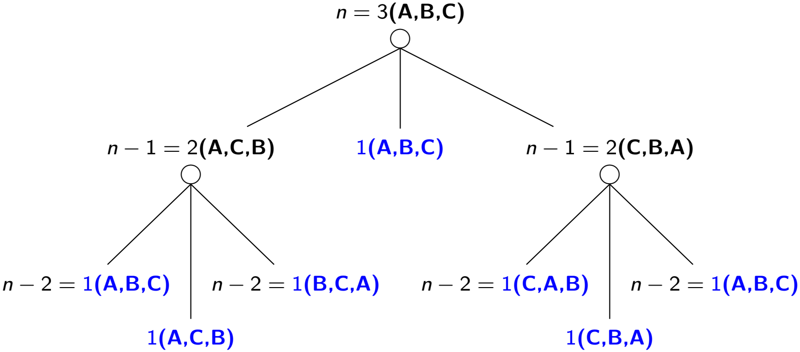
Příklad – Hanojské věže – pokrač.

schéma celého řešení pro $n = 3$:



Příklad – Hanojské věže – pokrač.

schéma celého řešení pro $n = 3$:



Příklad – Hanojské věže – pokrač.

```
function HanoiTower(n, source, dest, spare)
    if n = 1 then
        return (source, dest)     # pro 1 disk – přesuň ho ze source na dest
    else
        output = HanoiTower(n - 1, source, spare, dest)  # přesuň n − 1 disků na spare
        output.append((source, dest))     # přesuň zbývající největší disk na dest
        # přesuň odložených n − 1 disků na dest
        output.append(HanoiTower(n - 1, spare, dest, source))
        return output
```

Příklad – Hanojské věže – pokrač.

```
function HanoiTower(n, source, dest, spare)
    if n = 1 then
        return (source, dest)    # pro 1 disk – přesuň ho ze source na dest
    else
        output = HanoiTower(n - 1, source, spare, dest) # přesuň n − 1 disků na spare
        output.append((source, dest))   # přesuň zbývající největší disk na dest
        # přesuň odložených n − 1 disků na dest
        output.append(HanoiTower(n - 1, spare, dest, source))
        return output

HanoiTower(3,'a','b','c'):
    [('a', 'b'), ('a', 'c'), ('b', 'c'), ('a', 'b'), ('c', 'a'),
     ('c', 'b'), ('a', 'b')]
```

optimalizace?

Příklad – Hanojské věže – pokrač.

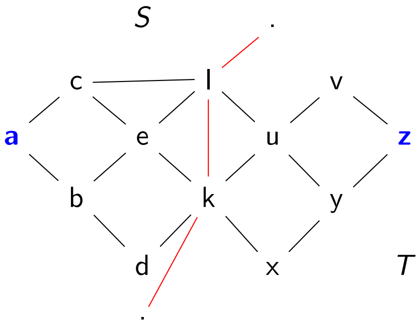
```
function HanoiTower(n, source, dest, spare)
    if n = 1 then
        return (source, dest)    # pro 1 disk – přesuň ho ze source na dest
    else
        output = HanoiTower(n - 1, source, spare, dest) # přesuň n − 1 disků na spare
        output.append((source, dest))    # přesuň zbývající největší disk na dest
        # přesuň odložených n − 1 disků na dest
        output.append(HanoiTower(n - 1, spare, dest, source))
        return output

HanoiTower(3,'a','b','c'):
    [('a', 'b'), ('a', 'c'), ('b', 'c'), ('a', 'b'), ('c', 'a'),
     ('c', 'b'), ('a', 'b')]
```

optimalizace – ukládat výsledky prvního rekurzivního volání a uložený výsledek vždy převzít **bez nadbytečné další rekurze**

Cesta mezi městy pomocí dekompozice

města:

a, . . . , **e**	. . .	ve státě S
l a **k**	. . .	hraniční přechody
u, . . . , **z**	. . .	ve státě T

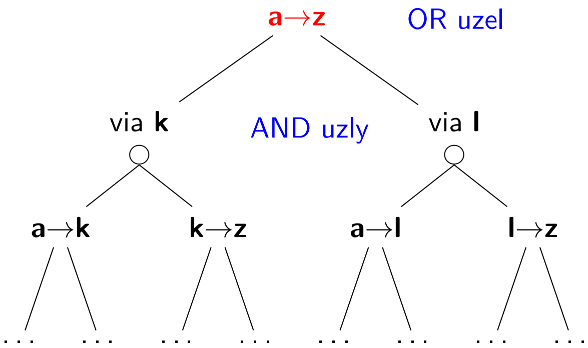


hledáme cestu z **a** do **z**:

- cesta z **a** do hraničního přechodu
- cesta z hraničního přechodu do **z**

Cesta mezi městy pomocí dekompozice – pokrač.

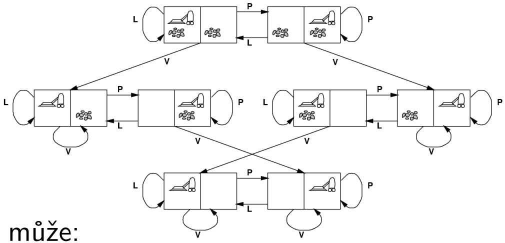
schéma řešení pomocí rozkladu na podproblémy = AND/OR graf



Celkové řešení = podgraf AND/OR grafu, který nevynechává žádného následníka AND-uzlu.

Příklad – agent vysavač v nestálém prostředí

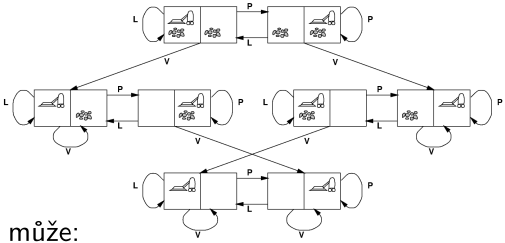
problém agenta Vysavače
v **nestálém** prostředí:



- dvě místnosti, jeden vysavač
- v každé místnosti je/není špína
- počet stavů je $2 \times 2^2 = 8$
- akce $=\{doLeva, doPrava, Vysávej\}$
- nedeterminismus – akce *Vysávej* může:
  - ve špinavé místnosti – vysát místnost a někdy i tu vedlejší
  - v čisté místnosti – někdy místnost zašpinit

Příklad – agent vysavač v nestálém prostředí

problém agenta Vysavače
v **nestálém** prostředí:

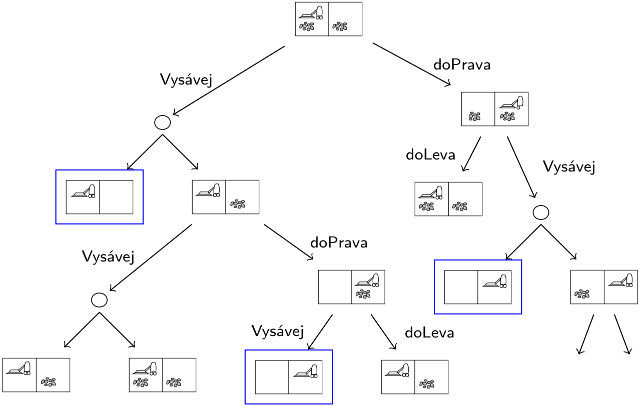


- dvě místnosti, jeden vysavač
- v každé místnosti je/není špína
- počet stavů je $2 \times 2^2 = 8$
- akce $= \{doLeva, doPrava, Vysávej\}$
- nedeterminismus – akce *Vysávej* může:
  - ve špinavé místnosti – vysát místnost a někdy i tu vedlejší
  - v čisté místnosti – někdy místnost zašpinit

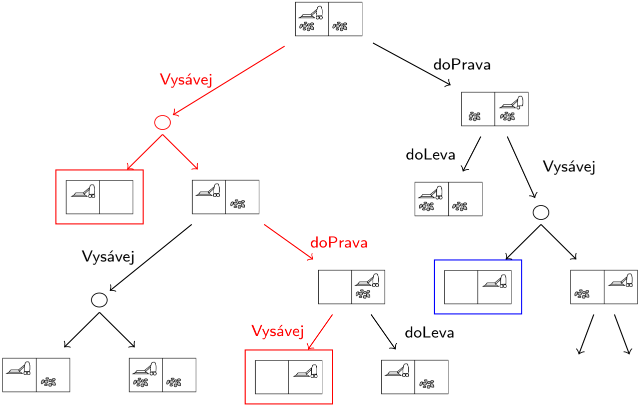
Strategie/kontingenční plán (prohledávací strom) obsahuje 2 typy uzlů:

- deterministické stavy, kde se prostředí nemůže měnit – agent jen volí další postup, **OR**
- nedeterministické stavy, kde se prostředí náhodně může změnit – agent musí řešit více možností, **AND**
- mohou nastat cykly, řešení je jen když nedeterminismus není vždy negativní

Příklad – agent vysavač v nestálém prostředí pokrač.



Příklad – agent vysavač v nestálém prostředí pokrač.

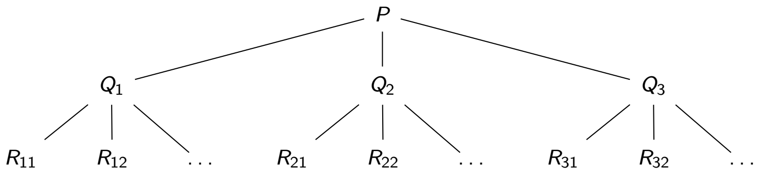


Příklad – výherní strategie

Hra 2 hráčů s perfektními znalostmi, 2 výstupy $\begin{cases}\text{výhra}\\ \text{prohra}\end{cases}$

Výherní strategii je možné formulovat jako AND/OR graf:

- počáteční stav P typu *já-jsem-na-tahu*
- moje tahy vedou do stavů $Q_1, Q_2, \ldots$ typu *soupeř-je-na-tahu*
- následně soupeřovy tahy vedou do stavů $R_{11}, R_{12}, \ldots$ *já-jsem-na-tahu*

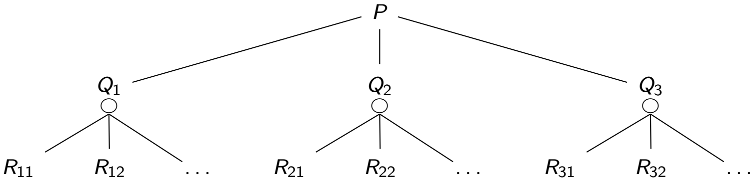


Příklad – výherní strategie

Hra 2 hráčů s perfektními znalostmi, 2 výstupy $\left\{\begin{array}{l}\text{výhra}\\ \text{prohra}\end{array}\right.$

Výherní strategii je možné formulovat jako AND/OR graf:

- počáteční stav P typu *já-jsem-na-tahu*
- moje tahy vedou do stavů $Q_1, Q_2, \ldots$ typu *soupeř-je-na-tahu*
- následně soupeřovy tahy vedou do stavů $R_{11}, R_{12}, \ldots$ *já-jsem-na-tahu*
- cíl – stav, který je výhra podle pravidel (*prohra* je neřešitelný problém)
- stav P *já-jsem-na-tahu* je výherní $\Leftrightarrow$ některý z Q_i je výherní, **OR**
- stav Q_i *soupeř-je-na-tahu* je výherní $\Leftrightarrow$ všechny R_{ij} jsou výherní, **AND**
- **výherní strategie** = řešení AND/OR grafu

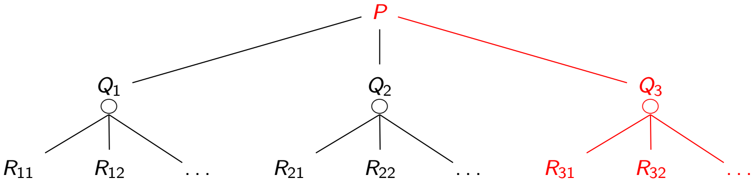


Příklad – výherní strategie

Hra 2 hráčů s perfektními znalostmi, 2 výstupy $\begin{cases} \text{výhra} \\ \text{prohra} \end{cases}$

Výherní strategii je možné formulovat jako AND/OR graf:

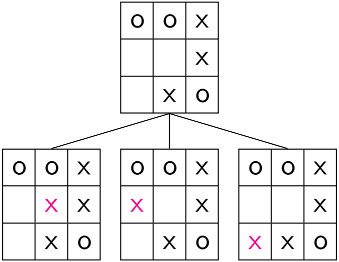
- počáteční stav P typu *já-jsem-na-tahu*
- moje tahy vedou do stavů $Q_1, Q_2, \ldots$ typu *soupeř-je-na-tahu*
- následně soupeřovy tahy vedou do stavů $R_{11}, R_{12}, \ldots$ *já-jsem-na-tahu*
- cíl – stav, který je výhra podle pravidel (*prohra* je neřešitelný problém)
- stav P *já-jsem-na-tahu* je výherní $\Leftrightarrow$ některý z Q_i je výherní, **OR**
- stav Q_i *soupeř-je-na-tahu* je výherní $\Leftrightarrow$ všechny R_{ij} jsou výherní, **AND**
- **výherní strategie** = řešení AND/OR grafu



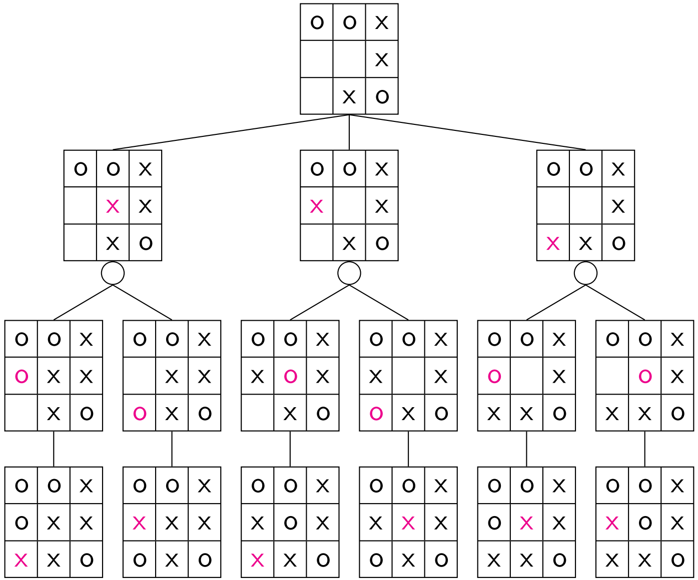
Příklad – výherní strategie

O	O	X
		X
	X	O

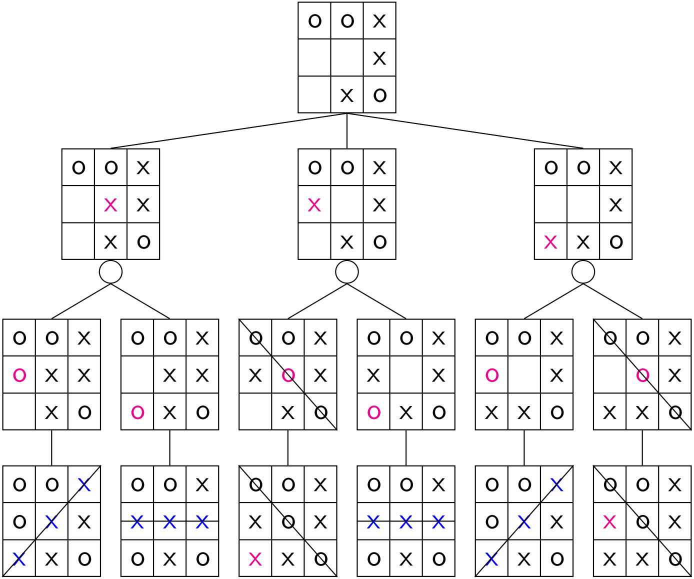
Příklad – výherní strategie



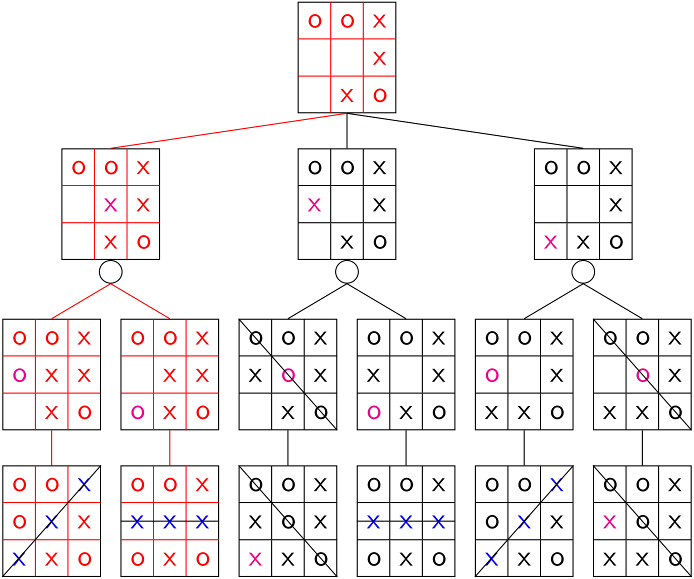
Příklad – výherní strategie



Příklad – výherní strategie



Příklad – výherní strategie



AND/OR graf a strom řešení

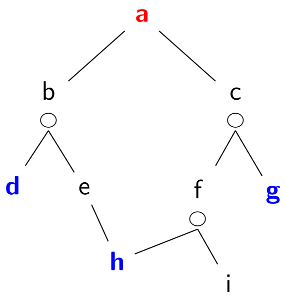
AND/OR graf = graf s 2 typy vnitřních uzlů – AND uzly a OR uzly

- *AND uzel* jako součást řešení vyžaduje průchod všech svých poduzlů
- *OR uzel* se chová jako bežný uzel klasického grafu

AND/OR graf a strom řešení

AND/OR graf = graf s 2 typy vnitřních uzlů – AND uzly a OR uzly

- *AND uzel* jako součást řešení vyžaduje průchod všech svých poduzlů
- *OR uzel* se chová jako bežný uzel klasického grafu



AND/OR graf a strom řešení

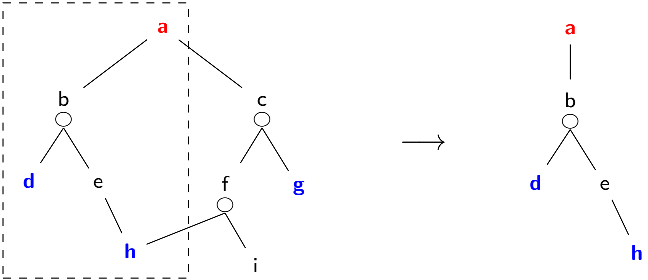
strom řešení T problému P s AND/OR grafem G:

- problém P je kořen stromu T
- jestliže P je OR uzel grafu G $\Rightarrow$ právě jeden z jeho následníků se svým stromem řešení je v T
- jestliže P je AND uzel grafu G $\Rightarrow$ všichni jeho následníci se svými stromy řešení jsou v T
- každý list stromu řešení T je cílovým uzlem v G

AND/OR graf a strom řešení

strom řešení T problému P s AND/OR grafem G:

- problém P je kořen stromu T
- jestliže P je OR uzel grafu G $\Rightarrow$ právě jeden z jeho následníků se svým stromem řešení je v T
- jestliže P je AND uzel grafu G $\Rightarrow$ všichni jeho následníci se svými stromy řešení jsou v T
- každý list stromu řešení T je cílovým uzlem v G



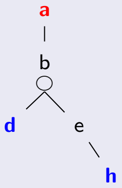
Obsah

Prohledávání AND/OR grafu do hloubky

```
function ANDORDEPTHFIRSTSEARCH(problem, path ← []) # vrací řešení nebo "failure"
   if length(path) = 0 then
      return AndOrDepthFirstSearch(problem, [problem.init_state])
   current_node ← path.last()   # poslední prvek cesty
   if problem.is_goal(current_node) then
      return [] # prázdné (elementární) řešení
   else if problem.is_or_state(current_node) then          OR-uzel
      foreach child in problem.moves(current_node) do
         if child ∈ path then next
         result = AndOrDepthFirstSearch(problem, path + [child])
         if result ≠ "failure" then return [child] + result
      return "failure"
   else if problem.is_and_state(current_node) then         AND-uzel
      results = []
      foreach child in problem.moves(current_node) do
         if child ∈ path then return "failure"
         result = AndOrDepthFirstSearch(problem, path + [child])
         if result = "failure" then return "failure"
         results .append(result)
      return [child] + [results]
```

Prohledávání AND/OR grafu do hloubky

```
function AndOrDepthFirstSearch(problem, path ← []) # vrací řešení nebo "failure"
    if length(path) = 0 then
        return AndOrDepthFirstSearch(problem, [problem.init_state])
    current_node ← path.last()   # poslední prvek cesty
    if problem.is_goal(current_node) then
        return [] # prázdné (elementární) řešení
    else if problem.is_or_state(current_node) then          OR-uzel
        foreach child in problem.moves(current_node) do
            if child ∈ path then next
            result = AndOrDepthFirstSearch(problem, path + [child])
            if result ≠ "failure" then return [child] + result
        return "failure"
    else if problem.is_and_state(current_node) then         AND-uzel
        results = []
        foreach child in problem.moves(current_node) do
            if child ∈ path then return "failure"
            result = AndOrDepthFirstSearch(problem, path + [child])
            if result = "failure" then return "failure"
            results.append(result)
        return [child] + [results]

AndOrDepthFirstSearch(problem):
    ['a','b',[['d'],['e','h']]]
```



Heuristické prohledávání AND/OR grafu (AO*)

- algoritmus **AO*** má stejné charakteristiky a složitost jako A*
- cena přechodové hrany = míra složitosti podproblému:

  uzel = and/or , [(NaslUzel1,Cena1), (NaslUzel2,Cena2), ... , (NaslUzelN,CenaN)]

- definujeme **cenu uzlu** jako cenu optimálního řešení jeho podstromu
- pro každý uzel N máme daný odhad jeho ceny:

  $h(N)$ = heuristický odhad ceny optimálního podgrafu s kořenem N

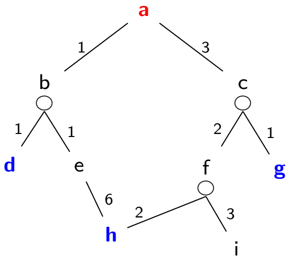
- pro každý uzel N, jeho následníky $N_1, \ldots, N_b$ a jeho předchůdce M definujeme:

$$\mathbf{F(N)} = \mathrm{cena}(M,N) + \begin{cases} h(N), & \text{pro ještě neexpandovaný uzel } N \\ 0, & \text{pro cílový uzel (elementární problém)} \\ \min_i(F(N_i)), & \text{pro OR-uzel } N \\ \sum_i F(N_i), & \text{pro AND-uzel } N \end{cases}$$

Pro **optimální strom řešení** S je tedy $F(S)$ právě cena tohoto řešení

Heuristické prohledávání AND/OR grafu – příklad

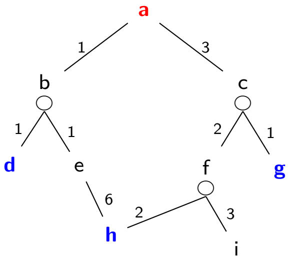
setříděný seznam částečně expandovaných stromů řešení $=$
$[\text{Nevyřešený}_1, \text{Nevyřešený}_2, \ldots, \text{Vyřešený}_1, \ldots]$
$F_{\text{Nevyřešený}_1} \leq F_{\text{Nevyřešený}_2} \leq \cdots$

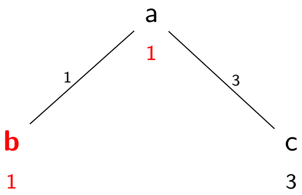


předp. $\forall N : h(N) = 0$

Heuristické prohledávání AND/OR grafu – příklad

setříděný seznam částečně expandovaných stromů řešení =
[Nevyřešený$_1$, Nevyřešený$_2$, ..., Vyřešený$_1$, ...]
$F_{\text{Nevyřešený}_1} \leq F_{\text{Nevyřešený}_2} \leq \dots$

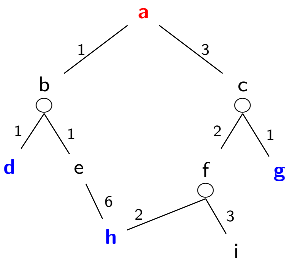


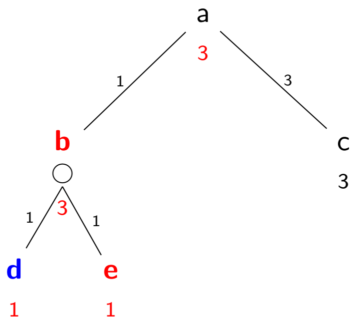


předp. $\forall N : h(N) = 0$

Heuristické prohledávání AND/OR grafu – příklad

setříděný seznam částečně expandovaných stromů řešení =
[Nevyřešený$_1$, Nevyřešený$_2$, ..., Vyřešený$_1$, ...]
$F_{\text{Nevyřešený}_1} \leq F_{\text{Nevyřešený}_2} \leq \cdots$

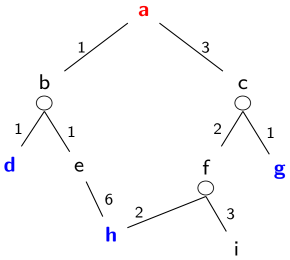




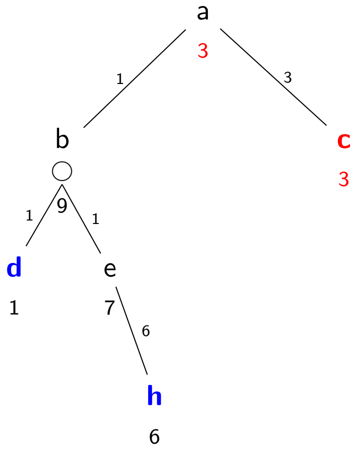
předp. $\forall N : h(N) = 0$

Heuristické prohledávání AND/OR grafu – příklad

setříděný seznam částečně expandovaných stromů řešení $=$
[Nevyřešený$_1$, Nevyřešený$_2$, ..., Vyřešený$_1$, ...]
$F_{\text{Nevyřešený}_1} \leq F_{\text{Nevyřešený}_2} \leq \cdots$



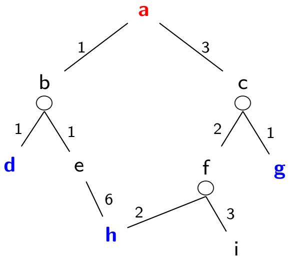
předp. $\forall N : h(N) = 0$



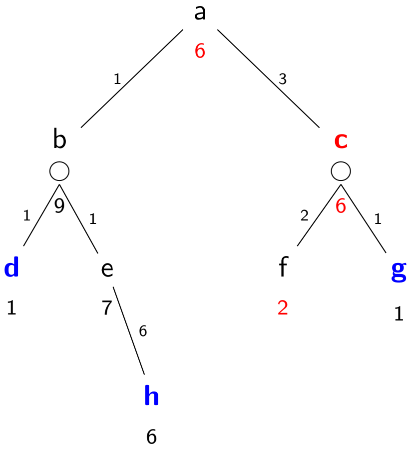
Heuristické prohledávání AND/OR grafu – příklad

setříděný seznam částečně expandovaných stromů řešení $=$ [Nevyřešený$_1$, Nevyřešený$_2$, …, Vyřešený$_1$, …]

$F_{\text{Nevyřešený}_1} \leq F_{\text{Nevyřešený}_2} \leq \cdots$

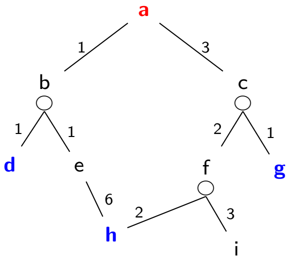


předp. $\forall N : h(N) = 0$

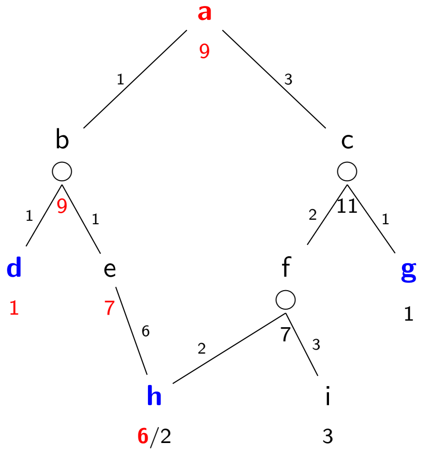


Heuristické prohledávání AND/OR grafu – příklad

setříděný seznam částečně expandovaných stromů řešení =
[Nevyřešený$_1$, Nevyřešený$_2$, ..., Vyřešený$_1$, ...]
$F_{\text{Nevyřešený}_1} \leq F_{\text{Nevyřešený}_2} \leq \dots$

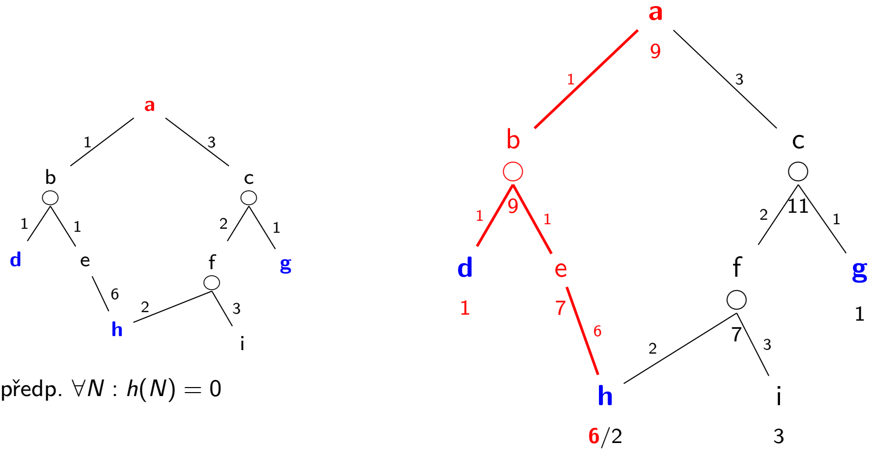


předp. $\forall N : h(N) = 0$



Heuristické prohledávání AND/OR grafu – příklad

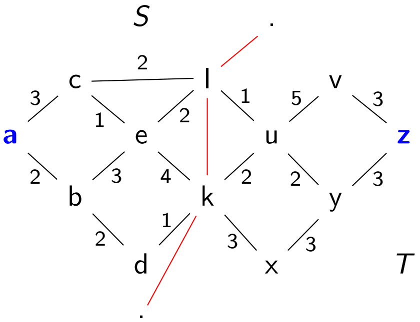
setříděný seznam částečně expandovaných stromů řešení =
[Nevyřešený$_1$, Nevyřešený$_2$, ..., Vyřešený$_1$, ...]
$F_{\text{Nevyřešený}_1} \leq F_{\text{Nevyřešený}_2} \leq \dots$



předp. $\forall N : h(N) = 0$

Cesta mezi městy heuristickým AND/OR hledáním

- cesta mezi sousedícími městy **Mesto1** a **Mesto2** – ohodnocené hrany **problem.moves(Mesto1)** → **[(Mesto2,Vzdal2), ...]**
- klíčové postavení města **Mesto3** na cestě z **Mesto1** do **Mesto2** – funkce **problem.key(Mesto1, Mesto2)** → **[Mesto3, ...]**.



Cesta mezi městy heuristickým AND/OR hledáním

vlastní hledání cesty:

1. $\exists$ **Y1**, **Y2**,... **klíčové body** mezi městy **A** a **Z**.
   Hledej jednu z cest:
   - cestu z **A** do **Z** přes **Y1**
   - cestu z **A** do **Z** přes **Y2**
   - ...
2. **Není**-li mezi městy **A** a **Z** **klíčové město** $\Rightarrow$ hledej souseda **Y** města **A** takového, že existuje cesta z **Y** do **Z**.

Cesta mezi městy heuristickým AND/OR hledáním

Konstrukce příslušného AND/OR grafu:

"manuální" výpis všech uzlů:

```
# kterákoliv cesta přes klíčové město
'a-z' → ('or', [('a-z via k', 0), ('a-z via l', 0)])
'a-v' → ('or', [('a-v via k', 0), ('a-v via l', 0)])
...

# kterákoliv cesta přes sousední města
'a-l' → ('or', [('c-l', 3), ('b-l', 2)])
'b-l' → ('or', [('e-l', 3), ('d-l', 2)])
...

# cesta do klíčového města a z klíčového města
'a-z via l' → ('and', [('a-l', 0), ('l-z', 0)])
'a-v via l' → ('and', [('a-l', 0), ('l-v', 0)])
...

# cíle – elementární problémy
goal('a-a'); goal('b-b'); ...
```

Cesta mezi městy heuristickým AND/OR hledáním

Konstrukce příslušného AND/OR grafu:

"pravidlová" definice grafu:

```
# kterákoliv cesta přes klíčové město 'a-z' → ('or', [('a-z via k', 0), ('a-z via l', 0)]) ...
for X ∈ problem.cities do for Z ∈ problem.cities do
    nodes = []; for Y ∈ problem.key(X, Z) do nodes.append(('X-Z via Y', 0))
    if length(nodes)>0 then problem.add('X-Z' → ('or', nodes))

# kterákoliv cesta přes sousední města 'a-l' → ('or', [('c-l', 3), ('b-l', 2)]) ...
for X ∈ problem.cities do for Z ∈ problem.cities do
    nodes = []; for Y, V ∈ problem.moves(X) do nodes.append(('Y-Z', V))
    if length(nodes)>0 then problem.add('X-Z' → ('or', nodes))

# cesta do a z klíčového města 'a-z via l' → ('and', [('a-l', 0), ('l-z', 0)]) ...
for X ∈ problem.cities do for Z ∈ problem.cities do
    for Y ∈ problem.key(X, Z) do
        problem.add('X-Z via Y' → ('and', [('X-Y',0), ('Y-Z',0)]))

# cíle – elementární problémy goal('a-a'); goal('b-b'); ...
for X ∈ problem.cities do
    problem.add(goal('X-X'))
```

Cesta mezi městy heuristickým AND/OR hledáním – pokrač.

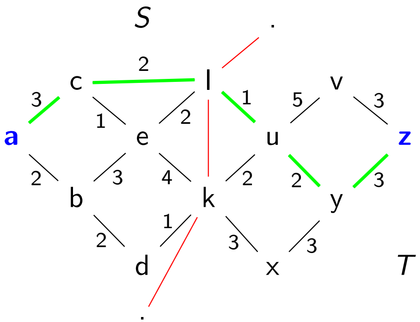
heuristika $h(\ X - Z \quad | \quad X - Z\ via\ Y\ ) =$ *vzdušná vzdálenost*

Když $\forall n : h(n) \leq h^*(n)$, kde h^* je minimální cena řešení uzlu $n \Rightarrow$ najdeme **vždy optimální řešení**

Cesta mezi městy heuristickým AND/OR hledáním – pokrač.

heuristika $h(\ X - Z \quad | \quad X - Z \text{ via } Y\ ) = \textit{vzdušná vzdálenost}$

Když $\forall n : h(n) \leq h^*(n)$, kde h^* je minimální cena řešení uzlu $n \Rightarrow$ najdeme **vždy optimální řešení**




```
AO*Search('a-z'):
  [('a-z',11),
   ('a-z via l',11),
     [[('l-z',6),
       ('u-z',6),
       ('y-z',5),
       ('z-z',3)],
      [('a-l',5),
       ('c-l',5),
       ('l-l',2)]]]
```

AND-uzel

Obsah

Problémy s omezujícími podmínkami

- standardní problém řešený prohledáváním stavového prostoru $\rightarrow$ stav je "*černá skříňka*" – pouze cílová podmínka a přechodová funkce

Problémy s omezujícími podmínkami

- standardní problém řešený prohledáváním stavového prostoru → stav je "*černá skříňka*" – pouze cílová podmínka a přechodová funkce
- **problém s omezujícími podmínkami**, *Constraint Satisfaction Problem*, CSP:
  - n-tice proměnných $X_1, X_2, \ldots, X_n$ s hodnotami z domén $D_1, D_2, \ldots, D_n$, $D_i \neq \emptyset$
  - množina omezení $C_1, C_2, \ldots, C_m$ nad proměnnými X_i

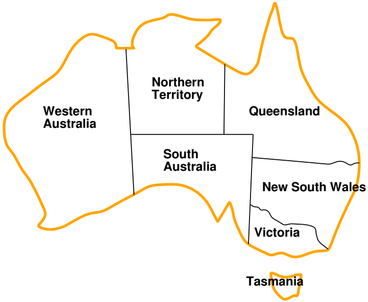
Problémy s omezujícími podmínkami

- standardní problém řešený prohledáváním stavového prostoru $\rightarrow$ stav je "*černá skříňka*" – pouze cílová podmínka a přechodová funkce
- **problém s omezujícími podmínkami**, *Constraint Satisfaction Problem*, CSP:
  - n-tice proměnných $X_1, X_2, \ldots, X_n$ s hodnotami z domén $D_1, D_2, \ldots, D_n$, $D_i \neq \emptyset$
  - množina omezení $C_1, C_2, \ldots, C_m$ nad proměnnými X_i
  - **stav** = přiřazení hodnot proměnným $\{X_i = v_i, X_j = v_j, \ldots\}$
    - konzistentní přiřazení neporušuje žádné z omezení C_i
    - úplné přiřazení zmiňuje každou proměnnou X_i
  - **řešení** = úplné konzistentní přiřazení hodnot proměnným
    někdy je ještě potřeba maximalizovat *cílovou funkci*

Problémy s omezujícími podmínkami

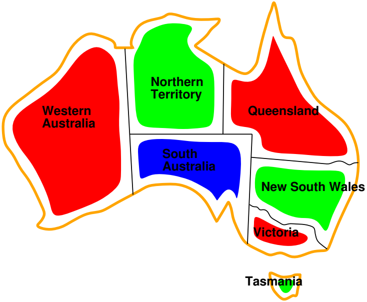
- standardní problém řešený prohledáváním stavového prostoru $\rightarrow$ stav je "*černá skříňka*" – pouze cílová podmínka a přechodová funkce
- **problém s omezujícími podmínkami**, *Constraint Satisfaction Problem*, CSP:
  - n-tice proměnných $X_1, X_2, \ldots, X_n$ s hodnotami z domén $D_1, D_2, \ldots, D_n$, $D_i \neq \emptyset$
  - množina omezení $C_1, C_2, \ldots, C_m$ nad proměnnými X_i
  - **stav** = přiřazení hodnot proměnným $\{X_i = v_i, X_j = v_j, \ldots\}$
    - konzistentní přiřazení neporušuje žádné z omezení C_i
    - úplné přiřazení zmiňuje každou proměnnou X_i
  - **řešení** = úplné konzistentní přiřazení hodnot proměnným
    někdy je ještě potřeba maximalizovat *cílovou funkci*
- výhody:
  - jednoduchý formální jazyk pro specifikaci problému
  - může využívat obecné heuristiky (ne jen specifické pro daný problém)

Příklad – obarvení mapy



- Proměnné WA, NT, Q, NSW, V, SA, T
- Domény $D_i = \{$červená, zelená, modrá$\}$
- Omezení – sousedící oblasti musí mít různou barvu
  tj. pro každé dvě sousedící: $WA \neq NT$ nebo
  $(WA, NT) \in \{($červená, zelená$)$, $($červená, modrá$)$, $($zelená, modrá$), \ldots\}$

Příklad – obarvení mapy – pokrač.



- Řešení – konzistentní přiřazení všem proměnným:
  $\{WA =$ červená, $NT =$ zelená, $Q =$ červená, $NSW =$ zelená, $V =$ červená, $SA =$ modrá, $T =$ zelená$\}$

SliDo

Varianty CSP podle hodnot proměnných

- diskrétní hodnoty proměnných – spočetně mnoho jednotlivých hodnot
  - **konečné domény**
    - např. Booleovské (včetně NP-úplných problémů splnitelnosti)
    - výčtové
  - **nekonečné domény** – čísla, řetězce, ...
    - např. rozvrh prací – proměnné = počáteční/koncový den každého úkolu
    - vyžaduje jazyk omezení, např. $StartJob_1 + 5 \leq StartJob_3$
    - číselné *lineární* problémy jsou řešitelné, *nelineární* obecné řešení nemají

Varianty CSP podle hodnot proměnných

- diskrétní hodnoty proměnných – spočetně mnoho jednotlivých hodnot
  - **konečné domény**
    - např. Booleovské (včetně NP-úplných problémů splnitelnosti)
    - výčtové
  - **nekonečné domény** – čísla, řetězce, ...
    - např. rozvrh prací – proměnné = počáteční/koncový den každého úkolu
    - vyžaduje jazyk omezení, např. $StartJob_1 + 5 \leq StartJob_3$
    - číselné *lineární* problémy jsou řešitelné, *nelineární* obecné řešení nemají
- spojité hodnoty proměnných
  - časté u reálných problémů
  - např. počáteční/koncový čas měření na Hubbleově teleskopu (závisí na astronomických, precedenčních a technických omezeních)
  - *lineární omezení* řešené pomocí Lineárního programování (omezení = lineární (ne)rovnice tvořící konvexní oblast) $\rightarrow$ jsou řešitelné v polynomiálním čase

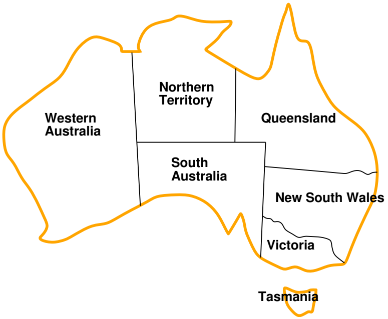
Varianty omezení

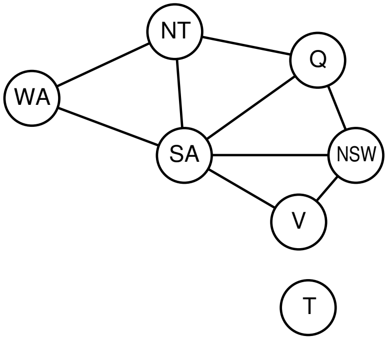
- unární omezení zahrnuje jedinou proměnnou
  např. $SA \neq$ zelená
- binární omezení zahrnují dvě proměnné
  např. $SA \neq WA$
- omezení vyššího řádu zahrnují 3 a více proměnných
  např. kryptoaritmetické omezení na sloupce u algebrogramu
- preferenční omezení (soft constraints), např. 'červená je lepší než zelená'
  možno reprezentovat pomocí ceny přiřazení u konkrétní hodnoty a
  konkrétní proměnné $\rightarrow$ hledá se optimalizované řešení vzhledem k ceně

Graf omezení

Pro **binární** omezení: uzly = proměnné, hrany = reprezentují jednotlivá omezení

Pro ***n*-ární** omezení: hypergraf: ○ uzly = proměnné, □ uzly = omezení, hrany = použití proměnné v omezení





Algoritmy pro řešení CSP využívají této grafové reprezentace omezení

CLP – Constraint Logic Programming

X **in** 1..5 , Y **in** 2..8 , $X+Y$ #= T:

  X **in** 1..5

  Y **in** 2..8

  T **in** 3..13

CLP – Constraint Logic Programming

?X in +Min..+Max

?X in +Domain . . .
A in 1..3 \/8..15 \/5..9 \/100.

+VarList ins +Domain

fd_dom(?Var,?Domain) zjištění domény proměnné

X **in** 1..5 , Y **in** 2..8 , $X+Y$ **#=** T:
X **in** 1..5
Y **in** 2..8
T **in** 3..13

CLP – Constraint Logic Programming

?X in +Min..+Max

?X in +Domain ...
A in 1..3 \/8..15 \/5..9 \/100.

+VarList ins +Domain

fd_dom(?Var,?Domain) zjištění domény proměnné

X **in** 1..5 , *Y* **in** 2..8 , *X*+*Y* **#=** *T*:
X **in** 1..5
Y **in** 2..8
T **in** 3..13

aritmetická omezení ...

- rel. operátory #=, #\=, #<, #=<, #>, #>=
- **sum(Variables,RelOp,Suma)**

výroková omezení ...
#\ negace, #/\ konjunkce, #\/ disjunkce, #<==> ekvivalence

kombinatorická omezení ...
all_distinct(List), **global_cardinality(List, KeyCounts)**

CLP – Constraint Logic Programming

?X in +Min..+Max

?X in +Domain . . .
A in 1..3 \/8..15 \/5..9 \/100.

+VarList ins +Domain

fd_dom(?Var,?Domain) zjištění domény proměnné

X **in** 1..5 , Y **in** 2..8 , $X+Y$ **#=** T:
X **in** 1..5
Y **in** 2..8
T **in** 3..13

aritmetická omezení . . .

- rel. operátory #=, #\=, #<, #=<, #>, #>=
- **sum(Variables,RelOp,Suma)**

výroková omezení . . .
#\ negace, #/\ konjunkce, #\/ disjunkce, #<==> ekvivalence

kombinatorická omezení . . .
all_distinct(List), **global_cardinality(List, KeyCounts)**

X **in** 1..5 , Y **in** 2..8 , $X+Y$ **#=** T, **labeling**([X,Y,T]):
$T = 3$
$X = 1$
$Y = 2$

hledá hodnoty podle omezení

CLP – Constraint Logic Programming – pokrač.

X #< 4, [X,Y] **ins** 0..5:
X **in** 0..3 , Y **in** 0..5.

CLP – Constraint Logic Programming – pokrač.

X #< 4, [X,Y] **ins** 0..5:
  X **in** 0..3 , Y **in** 0..5.

X #< 4, **indomain**(X):
  ERROR: Arguments are not sufficiently instantiated

CLP – Constraint Logic Programming – pokrač.

X #< 4, [X,Y] **ins** 0..5:
  X **in** 0..3 , Y **in** 0..5.

X #< 4, **indomain**(X):
  ERROR: Arguments are not sufficiently instantiated

X #> 3, X #< 6, **indomain**(X):
  X = 4
  X = 5

CLP – Constraint Logic Programming – pokrač.

```
X #< 4, [X,Y] ins 0..5:
    X in 0..3 , Y in 0..5.

X #< 4, indomain(X):
   ERROR: Arguments are not sufficiently  instantiated

X #> 3, X #< 6, indomain(X):
    X = 4
    X = 5

X in 4..sup, X #\= 17, fd_dom(X,F):
    F = 4..16\/18..sup,
    X in 4..16\/18..sup.
```

Příklad – algebrogram

```
   S E N D
+  M O R E
----------
 M O N E Y
```

Příklad – algebrogram

```
      S E N D
+     M O R E
  ----------
    M O N E Y
```

Proměnné
Domény
Omezení

Příklad – algebrogram

```
   S E N D
+  M O R E
----------
 M O N E Y
```

Proměnné $\{S, E, N, D, M, O, R, Y\}$

Domény

Omezení

Příklad – algebrogram

```
   S E N D
+  M O R E
----------
 M O N E Y
```

Proměnné $\{S, E, N, D, M, O, R, Y\}$

Domény $D_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Omezení

Příklad – algebrogram

```
   S E N D
+  M O R E
----------
 M O N E Y
```

Proměnné $\{S, E, N, D, M, O, R, Y\}$

Domény $D_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Omezení
- $S > 0, M > 0$
- $S \neq E \neq N \neq D \neq M \neq O \neq R \neq Y$
- $1000 * S + 100 * E + 10 * N + D + 1000 * M + 100 * O + 10 * R + E = 10000 * M + 1000 * O + 100 * N + 10 * E + Y$

Příklad – algebrogram

```
   S E N D
+  M O R E
----------
 M O N E Y
```

Proměnné $\{S, E, N, D, M, O, R, Y\}$

Domény $D_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Omezení
- $S > 0, M > 0$
- $S \neq E \neq N \neq D \neq M \neq O \neq R \neq Y$
- $1000 * S + 100 * E + 10 * N + D + 1000 * M + 100 * O + 10 * R + E = 10000 * M + 1000 * O + 100 * N + 10 * E + Y$

function MoreMoney([S,E,N,D,M,O,R,Y])
  [S,E,N,D,M,O,R,Y] **ins** 0..9
  S #> 0; M #> 0
  all_distinct ([S,E,N,D,M,O,R,Y])
  $1000{*}S + 100{*}E + 10{*}N + D + 1000{*}M + 100{*}O + 10{*}R + E$
    #= $10000{*}M + 1000{*}O + 100{*}N + 10{*}E + Y$
  labeling ([S,E,N,D,M,O,R,Y])

Příklad – algebrogram

```
    S E N D
+   M O R E
 ----------
  M O N E Y
```

Proměnné $\{S, E, N, D, M, O, R, Y\}$

Domény $D_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Omezení
- $S > 0, M > 0$
- $S \neq E \neq N \neq D \neq M \neq O \neq R \neq Y$
- $1000 * S + 100 * E + 10 * N + D + 1000 * M + 100 * O + 10 * R + E = 10000 * M + 1000 * O + 100 * N + 10 * E + Y$

function MoreMoney($[S,E,N,D,M,O,R,Y]$)
    $[S,E,N,D,M,O,R,Y]$ **ins** 0..9
    $S \mathrel{\#}> 0;\ M \mathrel{\#}> 0$
    all_distinct ($[S,E,N,D,M,O,R,Y]$)
    $1000{*}S + 100{*}E + 10{*}N + D + 1000{*}M + 100{*}O + 10{*}R + E$
        $\#= 10000{*}M + 1000{*}O + 100{*}N + 10{*}E + Y$
    labeling ($[S,E,N,D,M,O,R,Y]$)

MoreMoney($[S,E,N,D,M,O,R,Y]$):
    $S = 9,\ E = 5,\ N = 6,\ D = 7,\ M = 1,\ O = 0,\ R = 8,\ Y = 2$

Inkrementální formulace CSP

CSP je možné převést na standardní prohledávání takto:

- stav – přiřazení hodnot proměnným
- počáteční stav – prázdné přiřazení $\{\}$
- přechodová funkce – přiřazení hodnoty libovolné dosud nenastavené proměnné tak, aby výsledné přiřazení bylo konzistentní
- cílová podmínka – aktuální přiřazení je úplné
- cena cesty – konstantní (např. 1) pro každý krok

Inkrementální formulace CSP

CSP je možné převést na standardní prohledávání takto:

- stav – přiřazení hodnot proměnným
- počáteční stav – prázdné přiřazení $\{\}$
- přechodová funkce – přiřazení hodnoty libovolné dosud nenastavené proměnné tak, aby výsledné přiřazení bylo konzistentní
- cílová podmínka – aktuální přiřazení je úplné
- cena cesty – konstantní (např. 1) pro každý krok

1. platí beze změny pro **všechny** CSP!
2. prohledávácí strom dosahuje hloubky n (počet proměnných) a řešení se nachází v této hloubce ($d = n$) $\Rightarrow$ je vhodné použít prohledávání do hloubky

Prohledávání s navracením

- přiřazení proměnným jsou komutativní
  tj. [1. WA = červená, 2. NT = zelená] je totéž jako
  [1. NT = zelená, 2. WA = červená]
- stačí uvažovat pouze přiřazení jediné proměnné v každém kroku ⇒ počet listů max. $|D_i|^n$, větvení jde ovlivnit obecnými strategiemi
- prohledávání do hloubky pro CSP – tzv. **prohledávání s navracením** (*backtracking search*)
- prohledávání s navracením je základní neinformovaná strategie pro řešení problémů s omezujícími podmínkami
- schopný vyřešit např. problém n-dam pro $n \approx 25$ (naivní řešení 10^{69}, vlastní sloupce 10^{25})

Příklad – problém N dam

function QUEENS(N)
    $L = [q_{y1}, q_{y2}, \ldots, q_{yN}]$ # *seznam N proměnných*
    L **ins** $1..N$
    for $i \leftarrow 1$ **to** N-1 **do**
        for $j \leftarrow i+1$ **to** N **do**
            NoThreat($L[i]$, $L[j]$, j-i)
    labeling(L)

function NOTHREAT(Y_1, Y_2, J)
    return Y_1 **#\\=** Y_2 **and** Y_1+J **#\\=** Y_2 **and** Y_1-J **#\\=** Y_2

Příklad – problém N dam

function QUEENS(N)
  $L = [q_{y1}, q_{y2}, \ldots, q_{yN}]$ *# seznam N proměnných*
  L **ins** $1..N$ — 1. definice proměnných a domén
  for $i \leftarrow 1$ **to** N-1 **do**
    for $j \leftarrow i+1$ **to** N **do**
      NoThreat($L[i]$, $L[j]$, j-i) — 2. definice omezení
  labeling(L) — 3. hledání řešení

function NOTHREAT(Y_1, Y_2, J)
  return Y_1 #\= Y_2 **and** Y_1+J #\= Y_2 **and** Y_1-J #\= Y_2

Příklad – problém N dam

function QUEENS(N)
    $L = [q_{y1}, q_{y2}, \ldots, q_{yN}]$ *# seznam N proměnných*
    L **ins** $1..N$ — 1. definice proměnných a domén
    for $i \leftarrow 1$ **to** N-1 **do**
        for $j \leftarrow i+1$ **to** N **do**
            NoThreat($L[i]$, $L[j]$, j-i) — 2. definice omezení
    labeling(L) — 3. hledání řešení

function NOTHREAT(Y_1, Y_2, J)
    return Y_1 #\= Y_2 **and** Y_1+J #\= Y_2 **and** Y_1-J #\= Y_2

Queens(4):
    [2,4,1,3]
    [3,1,4,2]

Ovlivnění efektivity prohledávání s navracením

Obecné metody **ovlivnění efektivity**:

- Která proměnná dostane hodnotu v tomto kroku?
- V jakém pořadí zkoušet přiřazení hodnot konkrétní proměnné?
- Můžeme předčasně detekovat nutný neúspěch v dalších krocích?

Ovlivnění efektivity prohledávání s navracením

Obecné metody **ovlivnění efektivity**:

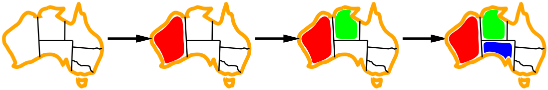
– Která proměnná dostane hodnotu v tomto kroku?

– V jakém pořadí zkoušet přiřazení hodnot konkrétní proměnné?

– Můžeme předčasně detekovat nutný neúspěch v dalších krocích?

používané **strategie**:

- nejomezenější proměnná $\rightarrow$ vybrat proměnnou s nejméně možnými hodnotami



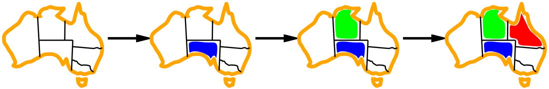
Ovlivnění efektivity prohledávání s navracením

Obecné metody **ovlivnění efektivity**:

– Která proměnná dostane hodnotu v tomto kroku?
– V jakém pořadí zkoušet přiřazení hodnot konkrétní proměnné?
– Můžeme předčasně detekovat nutný neúspěch v dalších krocích?

používané strategie:

- nejomezenější proměnná $\rightarrow$ vybrat proměnnou s nejméně možnými hodnotami
- nejvíce omezující proměnná $\rightarrow$ vybrat proměnnou s nejvíce omezeními na zbývající proměnné



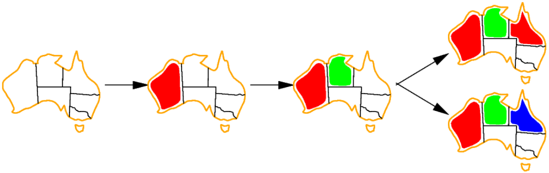
Ovlivnění efektivity prohledávání s navracením

Obecné metody **ovlivnění efektivity**:

– Která proměnná dostane hodnotu v tomto kroku?
– V jakém pořadí zkoušet přiřazení hodnot konkrétní proměnné?
– Můžeme předčasně detekovat nutný neúspěch v dalších krocích?

používané strategie:

- nejomezenější proměnná $\rightarrow$ vybrat proměnnou s nejméně možnými hodnotami
- nejvíce omezující proměnná $\rightarrow$ vybrat proměnnou s nejvíce omezeními na zbývající proměnné
- nejméně omezující hodnota $\rightarrow$ pro danou proměnnou – hodnota, která zruší nejmíň hodnot zbývajících proměnných SliDo



umožňuje 1 hodnotu pro SA

umožňuje 0 hodnot pro SA

Ovlivnění efektivity prohledávání s navracením

Obecné metody **ovlivnění efektivity**:

– Která proměnná dostane hodnotu v tomto kroku?
– V jakém pořadí zkoušet přiřazení hodnot konkrétní proměnné?
– Můžeme předčasně detekovat nutný neúspěch v dalších krocích?

používané strategie:

- nejomezenější proměnná → vybrat proměnnou s nejméně možnými hodnotami
- nejvíce omezující proměnná → vybrat proměnnou s nejvíce omezeními na zbývající proměnné
- nejméně omezující hodnota → pro danou proměnnou – hodnota, která zruší nejmíň hodnot zbývajících proměnných SliDo
- dopředná kontrola → udržovat seznam možných hodnot pro zbývající proměnné
- propagace omezení → navíc kontrolovat možné nekonzistence mezi zbývajícími proměnnými

Ovlivnění efektivity v CLP

V Prologu (CLP) možnosti ovlivnění efektivity – **labeling(Typ, ...)**:

```
?- constraints(Vars,Cost),
   labeling([ff,bisect,down,min(Cost)],Vars).
```

- výběr proměnné – **leftmost**, **min**, **max**, **ff**, ...
- dělení domény – **step**, **enum**, **bisect**
- prohledávání domény – **up**, **down**
- uspořádání řešení – bez uspořádání nebo **min(X)**, **max(X)**, ...

Systémy pro řešení omezujících podmínek

- Prolog – SWI, CHIP, ECLiPSe, SICStus Prolog, Prolog IV, GNU Prolog, IF/Prolog
- C/C++ – CHIP++, ILOG Solver, Gecode
- Java – JCK, JCL, Koalog
- LISP – Screamer
- Python – logilab-constraint `www.logilab.org/852`, python-constraint