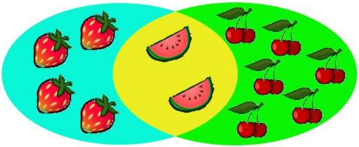
3 Množiny a množinové operace

V přehledu matematických formalismů informatiky se v této lekci zaměříme na první základní „datový typ“ matematiky, tj. na množiny. O množinách jste sice zajisté slyšeli už na základní škole, ale podstatou našeho předmětu je uvést povětšinou neformálně známé pojmy na patřičnou formální úroveň nutnou pro teoretické základy informatiky.



Stručný přehled lekce

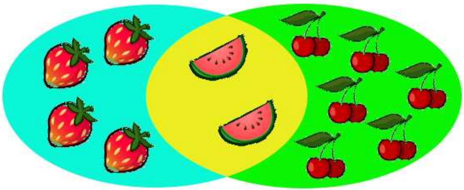
* Uvedení množin a operací množinového kalkulu.
* Uspořádané k-tice a kartézský součin.
* Porovnávání a určení množin. Princip inkluze a exkluze.
* Relace a funkce mezi množinami.

3.1 Pojem množiny

Co je vlastně množina?

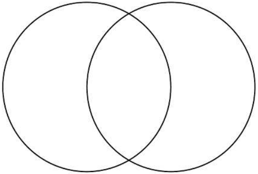
Na tuto otázku bohužel není zcela jednoduchá odpověď. . .

- Naivní pohled: „*Množina je soubor prvků a je svými prvky plně určena.*“



- Příklady zápisu množin $\emptyset$, $\{a,b\}$, $\{b,a\}$, $\{a,b,a\}$, $\{\{a,b\}\}$, $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$, $\{x \mid x \text{ je liché přirozené číslo}\}$.

Co je ale pak prvek?



Tady pozor, pojem prvku sám o sobě nemá matematický význam, svého významu totiž nabývá pouze ve spojení „*být prvkem množiny*“. Prvky množiny tak může být cokoliv, mimo jiné i další množiny.

Relativitu významu vztahu „prvek–množina“ si můžeme přiblížit třeba na vztahu „podřízený–nadřízený“ z běžného pracovního života. Tam také nemá smysl jen říkat, že je někdo podřízeným, aniž řekneme také jeho nadřízeného. Přitom i vedoucí je někomu ještě podřízený a naopak i ten poslední podřízený pracovník může být pánem třeba svého psa. Podobně je tomu s množinou jako „nadřízenou“ svých prvků.

Ale přece jenom… v dobře definovaném kontextu lze (omezeně) mluvit o prvcích jako samostatných entitách. Formálně se například jedná o *prvky* pevně dané nosné množiny.

Zápis množiny

Značení množin a jejich prvků:

- $x \in M$ „x je *prvkem* množiny M“,
- $\emptyset$ je *prázdná* množina $\{\}$. $\square$

Některé vlastnosti vztahu „být prvkem“ jsou

- $a \in \{a,b\}$, $a \not\in \{\{a,b\}\}$, $\{a,b\} \in \{\{a,b\}\}$, $\square a \not\in \emptyset$, $\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\emptyset \not\in \emptyset$,$\square$
- rovnost množin dle prvků $\{a,b\} = \{b,a\} = \{a,b,a\}$, $\{a,b\} \neq \{\{a,b\}\}$.$\square$

Značení: Počet prvků (*mohutnost*) množiny A zapisujeme $|A|$.

- $|\emptyset| = 0$, $|\{\emptyset\}| = 1$, $|\{a,b,c\}| = 3$, $|\{\{a,b\},c\}| = 2$.

Jednoduché srovnání množin

Vztah „být prvkem množiny“ nám přirozeně podává i způsob porovnávání množin mezi sebou. Jedná se o klíčovou část, čili hlavní nástroj teorie množin.

Definice: Množina A je *podmnožinou* množiny B, právě když každý prvek A je prvkem B. Píšeme $A \subseteq B$ nebo obráceně $B \supseteq A$.

Říkáme také, že se jedná o *inkluzi*. □

- Platí $\{a\} \subseteq \{a\} \subseteq \{a,b\} \not\subseteq \{\{a,b\}\}$, $\quad \emptyset \subseteq \{\emptyset\}$,
- $A \subsetneq B$, právě když $A \subseteq B$ a $A \neq B$ $\quad$ (A je *vlastní* podmnožinou B).□

Z naivní definice množiny pak přímo vyplývá následující:

Definice: Dvě množiny jsou si *rovny* $A = B$ právě tehdy, když $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$.

- Podle naivní definice jsou totiž množiny A a B stejné, mají-li stejné prvky.□
- Důkaz rovnosti množin $A = B$ má obvykle dvě části:
  Odděleně se dokáží inkluze $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$.

Ukázky nekonečných množin

Značení: Běžné číselné množiny v matematice jsou následující

* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ je množina přirozených čísel,
* $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ je množina celých čísel,
* $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ je množina celých kladných čísel,
* $\mathbb{Q}$ je množina racionálních čísel (zlomků).
* $\mathbb{R}$ je množina reálných čísel. □

Tyto uvedené číselné množiny jsou vesměs *nekonečné*, na rozdíl od konečných množin uvažovaných v předchozím „naivním" pohledu. □

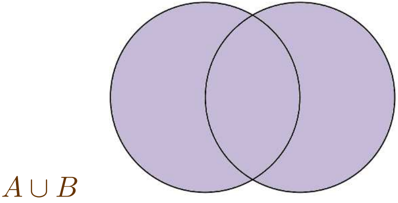
Pojem nekonečné množiny se přímo v matematice objevil až teprve v 19. století a brzy se s ním spojilo několik paradoxů ukazujících, že naivní pohled na teorii množin pro nekonečné množiny nedostačuje. My se k problematice nekonečných množin, Cantorově větě a Russelovu paradoxu vrátíme v závěru našeho předmětu v Lekci 15.

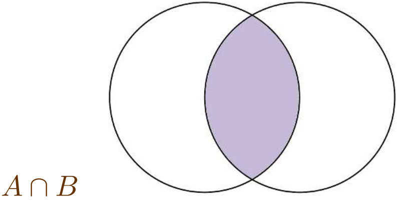
3.2 Množinové operace

Sjednocení a průnik

Definice 3.2. **Sjednocení** $\cup$ **a průnik** $\cap$ dvou množin A, B definujeme

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\}\,, \\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \in B\}\,. \end{aligned}$$





- Příklady $\{a, b, c\} \cup \{a, d\} = \{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c\} \cap \{a, d\} = \{a\}$.

Sjednocení a průnik

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \in B\}.$$

- Vždy platí „distributivita“ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ a $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ □
- a také „asociativita“ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (stejně pro $\cup$) a „komutativita“ $A \cap B = B \cap A$ (stejně pro $\cup$). □

Definice: Pro libovolný počet množin indexovaných pomocí I rozšířeně

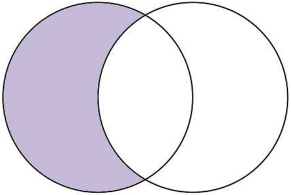
$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ pro nějaké } i \in I\} \square,$$
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ pro každé } i \in I\}. \square$$

- Nechť $A_i = \{2 \cdot i\}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ je množina všech sudých přirozených čísel. □
- Nechť $B_i = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \geq i\}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i = \emptyset$.

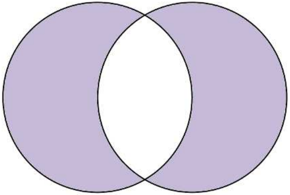
Množinový rozdíl

Definice 3.3. **Rozdíl $\setminus$ a symetrický rozdíl Δ** dvou množin A, B definujeme

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \notin B\},$$
$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$



$A \setminus B$



$A \Delta B$

- Příklady $\{a,b,c\} \setminus \{a,b,d\} = \{c\}$, $\{a,b,c\} \Delta \{a,b,d\} = \{c,d\}$.
- Vždy platí například $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ apod.

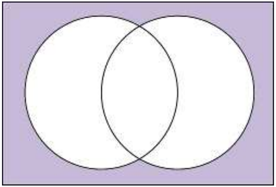
Definice: Pro libovolný počet množin indexovaných pomocí konečné I

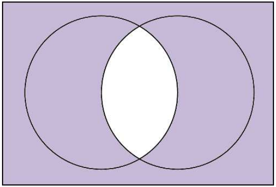
$$\Delta_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ pro lichý počet } i \in I\}.$$

Doplněk k množině

Definice: Nechť $A \subseteq M$. *Doplňkem A vzhledem k M* je množina $\overline{A} = M \setminus A$.

- Jedná se o poněkud specifickou operaci, která musí být vztažena vzhledem k nosné množině M !
  Je-li $M = \{a, b, c\}$, pak $\overline{\{a, b\}} = \{c\}$. Je-li $M = \{a, b\}$, pak $\overline{\{a, b\}} = \emptyset$. □
- Vždy pro $A \subseteq M$ platí $\overline{\overline{A}} = A$ („dvojí“ doplněk). □
- Vždy pro $A, B \subseteq M$ platí $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ a $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
  (Viz Vennovy diagramy.)





Potenční množina

Definice 3.4. **Potenční množina** množiny A,
neboli množina všech podmnožin, je definovaná vztahem

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}\,.$$

- Platí například $2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$,
- $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$, $2^{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,

Věta 3.5. *Počet prvků potenční množiny splňuje* $|2^A| = 2^{|A|}$.

Důkaz: Důkaz jen stručně naznačíme (pro přesnější zápis důkazu by se použila matematická indukce z Lekce 4).

Jak vybereme jednu podmnožinu $B \subseteq A$? Například tak, že pro každý z $|A|$ prvků množiny A se nezávisle rozhodneme, zda jej zařadíme do B nebo ne. To jsou dvě možnosti pro výběr každého prvku $b \in A$ a podle principu nezávislých výběrů je celkový počet různých podmnožin množiny A roven

$$\left|2^A\right| = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{|A|}\,. \qquad \Box$$

3.3 Kartézský součin

Definice: *Uspořádaná dvojice* (a, b) je zadána množinou $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. □

Fakt: Platí $(a, b) = (c, d)$ právě tehdy, když $a = c$ a současně $b = d$. □

- Co je dle definice (a, a)? □ $(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$. □

Definice 3.6. **Kartézský součin** dvou množin A, B definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic ze složek z A a B

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

□

- Příklady $\{a, b\} \times \{a\} = \{(a, a), (b, a)\}$,
  $\{c, d\} \times \{a, b\} = \{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b)\}$. □
- Platí $\emptyset \times X = \emptyset = X \times \emptyset$ pro každou množinu X. □
- Jednoduchá mnemotechnická pomůcka říká $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Skládání součinu

Definice: Pro $k \in \mathbb{N}, k > 0$ definujeme *uspořádanou k-tici* $(a_1, \cdots, a_k)$ ind.

- $(a_1) = a_1$,
- $(a_1, a_2, \cdots, a_i, a_{i+1}) = ((a_1, a_2, \cdots, a_i), a_{i+1})$. □

Fakt: Platí $(a_1, \cdots, a_k) = (b_1, \cdots, b_k)$, právě když $a_i = b_i$ pro každé $1 \leq i \leq k$. □

Definice *kartézského součinu* více množin: Pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, a_2, \cdots, a_k) \mid a_i \in A_i \text{ pro každé } 1 \leq i \leq k\}.$$ □

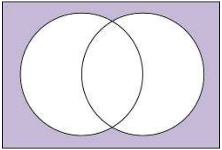
- Například $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Co je A^0? □ $\{\emptyset\}$, neboť jediná uspořádaná 0-tice je právě prázdná $\emptyset$.

Poznámka: Podle uvedené definice není kartézský součin asociativní, tj. obecně nemusí platit, že $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$. □

V matematické praxi je někdy výhodnější uvažovat upravenou definici, podle níž součin asociativní je. Pro účely této přednášky není podstatné, k jaké definici se přikloníme. Prezentované definice a věty „fungují“ pro obě varianty.

3.4 Porovnávání a určení množin

Věta 3.7. *Pro každé dvě množiny* $A, B \subseteq M$ *platí* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. □



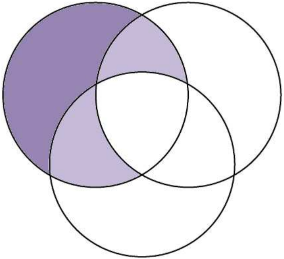
Důkaz v obou směrech rovnosti (viz ilustrační obrázek).

- $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$: □
  - ∗ Pro $x \in M$ platí $x \in \overline{A \cup B}$, právě když $x \notin A \cup B$, neboli když zároveň $x \notin A$ a $x \notin B$.
  - ∗ To znamená $x \in \overline{A}$ a zároveň $x \in \overline{B}$, z čehož vyplývá požadované $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. □
- $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cap \overline{B}$:
  - ∗ Pro $x \in M$ platí $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, právě když $x \in \overline{A}$ a zároveň $x \in \overline{B}$, neboli když zároveň $x \notin A$ a $x \notin B$. □
  - ∗ To znamená $x \notin A \cup B$, z čehož vyplývá požadované $x \in \overline{A \cup B}$.

□

Věta 3.8. *Pro každé tři množiny A, B, C platí*

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)\,.$$



Důkaz (viz ilustrační obrázek).

- $A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$:
  - ∗ Je-li $x \in A \setminus (B \cap C)$, pak $x \in A$ a zároveň $x \notin (B \cap C)$, neboli $x \notin B$ nebo $x \notin C$.
  - ∗ Pro první možnost máme $x \in (A \setminus B)$, pro druhou $x \in (A \setminus C)$.
- Naopak $A \setminus (B \cap C) \supseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$:
  - ∗ Je-li $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, pak $x \in (A \setminus B)$ nebo $x \in (A \setminus C)$.
  - ∗ Pro první možnost máme $x \in A$ a zároveň $x \notin B$, z čehož plyne $x \in A$ a zároveň $x \notin (B \cap C)$, a tudíž $x \in A \setminus (B \cap C)$.
  - ∗ Druhá možnost je analogická.

□

Charakteristický vektor (pod)množiny

V případech, kdy všechny uvažované množiny jsou podmnožinami nějaké konečné *nosné množiny* X, což není neobvyklé v programátorských aplikacích, s výhodou využijeme následující reprezentaci množin.

Definice: Mějme nosnou množinu $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Pro $A \subseteq X$ definujeme *charakteristický vektor* χ_A jako

$$\chi_A = (c_1, c_2, \ldots, c_n), \text{ kde } c_i = 1 \text{ pro } x_i \in A \text{ a } c_i = 0 \text{ jinak.} \square$$

- Platí $A = B$ právě když $\chi_A = \chi_B$.
- Množinové operace jsou realizovány „bitovými funkcemi“
  sjednocení $\sim$ OR, průnik $\sim$ AND, symetrický rozdíl $\sim$ XOR.

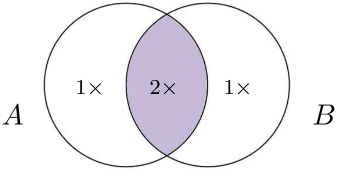
Princip inkluze a exkluze

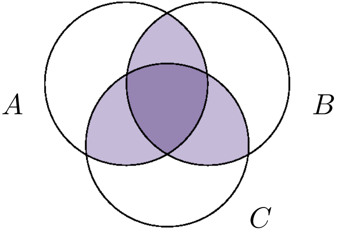
Tento důležitý a zajímavý kombinatorický princip je někdy také nazýván „princip *zapojení a vypojení*“.

Věta 3.9. *Počet prvků ve sjednocení dvou či tří množin spočítáme:*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad \square$$





Všimněte si, že větu lze stejně tak využít k výpočtu počtu prvků v průniku množin. . .

Příklad 3.10. *Z* 1000 *televizí jich při první kontrole na výrobní lince má* 5 *vadnou obrazovku,* 10 *je poškrábaných a* 12 *má jinou vadu. Přitom* 3 *televize mají současně všechny tři vady a* 4 *jiné jsou poškrábané a mají jinou vadu.*
Kolik televizí je celkem vadných?

Řešení: Dosazením $|A| = 5$, $|B| = 10$, $|C| = 12$, $|A \cap B \cap C| = 3$, $|A \cap B| = 3 + 0$, $|A \cap C| = 3 + 0$, $|B \cap C| = 3 + 4$ do Věty 3.9 zjistíme výsledek 17. □

Poznámka. Jen stručně, bez důkazu a bližšího vysvětlení, si uvedeme obecnou formu principu inkluze a exkluze:

$$\left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \cdot \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

(Jeho znalost nebude v předmětu vyžadována.)

3.5 Relace a funkce

Vedle množin jsou dalším důležitým základním „datovým typem“ matematiky relace, které nyní zavedeme a kterým vzhledem k jejich mnohotvárnému použití v informatice věnujeme významnou pozornost i v příštích lekcích.

Definice 3.11. **Relace** mezi množinami $A_1, A_2, \cdots, A_k$, pro $k \in \mathbb{N}$, je libovolná podmnožina kartézského součinu

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \,. \square$$

Pokud $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = A$, hovoříme o *$k$-ární relaci R na A*. $\square$

Příklady relací.

- $\{(1,a),(2,a),(2,b)\}$ je relace mezi $\{1,2,3\}$ a $\{a,b\}$.
- $\{(i, 2\cdot i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ je *binární* relace na $\mathbb{N}$. $\square$
- $\{(i,j,i+j) \mid i,j \in \mathbb{N}\}$ je *ternární* relace na $\mathbb{N}$.
- $\{3\cdot i \mid i \in \mathbb{N}\}$ je *unární* relace na $\mathbb{N}$. $\square$
- Jaký význam vlastně mají unární a nulární relace na A?

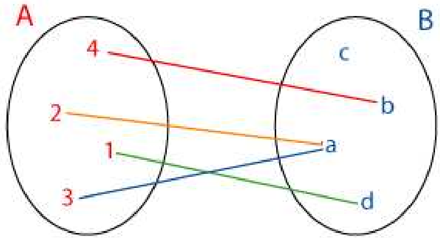
Funkce mezi množinami

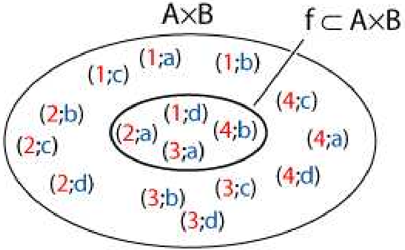
Definice 3.12. **(Totální) funkce** z množiny A do množiny B je relace f mezi A a B taková, že pro každé $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$. □

Množina A se nazývá *definiční obor* funkce f. □Funkcím se také říká *zobrazení*.□

Poznámka: Množinu B lze nazvat oborem hodnot, ale častější terminologie je, že *oborem hodnot* funkce f s definičním oborem A je podmnožina množiny B sestávající z těch y, pro něž existuje $x \in A$ takové, že $(x, y) \in f$.

Neformálně řečeno, ve funkci f je každé „vstupní“ hodnotě x přiřazena jednoznačně „výstupní“ hodnota y.





Značení: Pro funkce místo $(x, y) \in f$ píšeme obvykle $f(x) = y$.

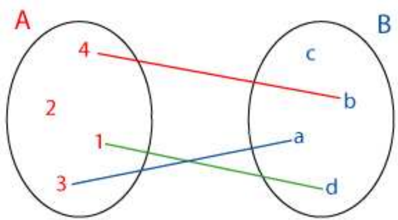
Zápis $f : A \to B$ říká, že f je funkce s def. oborem A a oborem hodnot, který je podmnožinou B. □

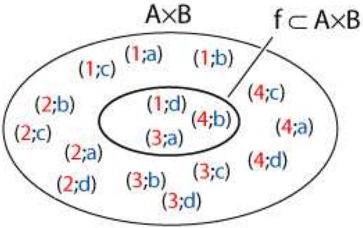
Příklady funkcí jsou třeba následující.

- Definujeme funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ předpisem $f(x) = x + 8$.
  Pak $f = \{(x, x + 8) \mid x \in \mathbb{N}\}$. □
- Definujeme funkci $plus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ předpisem $plus(i, j) = i + j$.
  Pak $plus = \{(i, j, i + j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$.

Parciální (částečné) funkce

Definice: Pokud naši Definici 3.12 upravíme tak, že požadujeme pro každé $x \in A$ nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$, obdržíme definici *parciální funkce* z A do B. □





V parciální funkci f nemusí být pro některé „vstupní" hodnoty x funkční hodnota definována (viz například $f(2)$ v uvedeném obrázku).

Pro *nedefinovanou* hodnotu používáme znak $\perp$.

Následuje několik příkladů parciálních funkcí.

- Definujeme parciální funkci $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{jestliže } x \geq 0, \\ \perp & \text{jinak.} \end{cases}$$

  Tj. $f = \{(x, 3 + x) \mid x \in \mathbb{N}\}$. $\square$

- Také funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná běžným analytickým předpisem

$$f(x) = \log x$$

  je jen parciální – není definována pro $x \leq 0$. $\square$

- Co je relace, přiřazující lidem v ČR jejich (česká) rodná čísla?