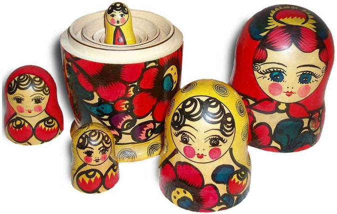
5 Rekurze, Strukturální indukce

Mimo „přímočarých“ definic množin a funkcí, jako výčtem prvků či explicitním zadáním, se obzvláště v informatice setkáváme s definicemi nepřímými, které se odvolávají na sebe sama.



Odborně se taková situace nazývá *rekurzí* či *induktivní definicí*. □

Stručný přehled lekce

* Posloupnosti a rekurentní vztahy, jejich řešení.
* Induktivní definice množin a funkcí, použití strukturální indukce.
* Nazpět k matematické logice:
  sémantika výrokové logiky a formální převod do normálního tvaru.

5.1 Posloupnosti a rekurentní vztahy

- Uspořádané k-tice z daného oboru hodnot H jsou nazývány *konečnými posloupnostmi* délky k (nad H). □
- Pojem posloupnosti zobecňuje toto pojetí na „nekonečnou délku“ takto:

Definice 5.1. **Posloupnost** (nekonečná) je zobrazením z přirozených čísel $\mathbb{N}$ do oboru hodnot H, neboli

$$p : \mathbb{N} \to H.$$

Místo „funkčního“ zápisu n-tého členu posloupnosti jako $p(n)$ častěji používáme „indexovou“ formu jako p_n, ve které se celá posloupnost zapíše $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Oborem hodnot H posloupnosti obvykle bývá nějaká číselná množina, ale může to být i jakákoliv jiná množina. □

Poznámka: Třebaže to není zcela formálně přesné, běžně se setkáme s posloupnostmi indexovanými od nuly nebo od jedničky, jak se to v aplikacích hodí.
I my se budeme tímto řídit a vždy si určíme počáteční index podle potřeby.

Příklady posloupností

- $p_0 = 0,\ p_1 = 2, \dots, p_i = 2i, \dots$ je posloupnost sudých nezáporných čísel,□
- $(3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141, \dots)$ je posl. postupných dekadických rozvojů π,□
- třeba (*jablko, hruška, švestka, hruška, hruška,...*) je posloupnost nad druhy ovoce coby oborem hodnot.□
- $(1,\ -1,\ 1,\ -1, \dots)$ je posloupnost určená vztahem $p_i = (-1)^i$, $i \geq 0$, □
- avšak pokud bychom chtěli stejnou posloupnost $(1,\ -1,\ 1,\ -1, \dots)$ určit indexy od jedné, tj. zadat ji jako q_i, $i \geq 1$, tak vztah bude $q_i = (-1)^{i-1}$. □

Definice: Posloupnost $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je

- ∗ *rostoucí* pokud $p_{n+1} > p_n$ a *nerostoucí* pokud $p_{n+1} \leq p_n$,
- ∗ *klesající* pokud $p_{n+1} < p_n$ a *neklesající* pokud $p_{n+1} \geq p_n$

platí pro všechna n.

Rekurentní zadání posloupnosti

Definice: Říkáme, že posloupnost $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je zadána *rekurentně*, pokud je dán její počáteční člen p_0 (či několik počátečních členů) a dále máme předpis, jak určit hodnotu členu p_{n+1} z hodnot p_i pro nějaká $i \leq n$.

Ukázky rekurentně zadaných posloupností:

- Zadáme-li posloupnost p_n počátečním členem $p_0 = 1$ a rekurentním vztahem $p_{n+1} = 2p_n$ pro $n \geq 0$, pak platí $p_n = 2^n$ pro všechna n. □
- Funkce „faktoriál“ (na přirozených číslech) je dána počáteční hodnotou $0! = 1$ a rekurentním vztahem $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ pro $n \geq 0$. □
- Známá Fibonacciho posloupnost je zadaná počátečními členy $f_1 = f_2 = 1$ a vztahem $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ pro $n \geq 1$. □

Všimněte si v poslední ukázce, že není potřeba doslova dodržovat formu rekurentního vztahu „p_{n+1} z hodnot p_i“, ale vždy je třeba hodnotu následujícího členu posloupnosti odvozovat z předchozích (tj. už určených) členů, v tom případě „f_{n+2} z hodnot f_i, $i = n, n+1$“.

Řešení rekurentní posloupnosti

Příklad 5.2. *Posloupnost $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ je zadaná rekurentní definicí*

$$f(0)=3 \quad \textit{a} \quad f(n+1)=2\cdot f(n)+1$$

pro všechna přirozená n. Určete hodnotu $f(n)$ vzorcem v závislosti na n. □

Řešení: V první fázi řešení takového příkladu musíme nějak „uhodnout" hledaný vzorec pro $f(n)$. Jak? Zkusíme vypočítat několik prvních hodnot a uvidíme...

$$\begin{aligned}
f(1) &= 2\cdot f(0)+1=2\cdot 3+1=7\\
f(2) &= 2\cdot f(1)+1=2\cdot 7+1=15\\
f(3) &= 2\cdot f(2)+1=2\cdot 15+1=31\\
f(4) &= 2\cdot f(3)+1=2\cdot 31+1=63 \square
\end{aligned}$$

Nepřipomínají nám tato čísla něco? Co třeba výrazy $8-1$, $16-1$, $32-1$, $64-1\ldots$? Bystrému čtenáři se již asi podařilo uhodnout, že půjde o mocniny dvou snížené o 1. Přesněji, $\boldsymbol{f(n)=2^{n+2}-1}$. □

Ve druhé fázi nesmíme ale zapomenout správnost našeho „věštění" dokázat, nejlépe matematickou indukcí podle n. □

Příklad 5.2. *Posloupnost $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ je zadaná rekurentní definicí*

$$f(0) = 3 \quad \textit{a} \quad f(n+1) = 2 \cdot f(n) + 1$$

pro všechna přirozená n. Určete hodnotu $f(n)$ vzorcem v závislosti na n.

Řešení: ...

Bystrému čtenáři se již asi podařilo uhodnout, že půjde o mocniny dvou snížené o 1. Přesněji, $\boldsymbol{f(n) = 2^{n+2} - 1}$.

Ve druhé fázi nesmíme ale zapomenout správnost našeho „věštění“ dokázat, nejlépe matematickou indukcí podle n. □

- Báze pro $n := 0$ říká $f(0) = 2^{0+2} - 1 = 4 - 1 = 3 = f(0)$, což platí. □
- Indukční krok využije indukční předpoklad platnosti vztahu $f(n) = 2^{n+2} - 1$ pro $n := i$ (tj. $f(i) = 2^{i+2} - 1$) a pokračuje úpravou ze zadaného rekurentního vzorce

  $$f(i+1) = 2 \cdot f(i) + 1 = 2 \cdot (2^{i+2} - 1) + 1 = 2 \cdot 2^{i+2} - 2 + 1 = 2^{(i+1)+2} - 1,$$

  což po dosazení pro $n := i+1$ znamená opět požadovaný vztah $f(n) = 2^{n+2} - 1$. □

Podle principu matematické indukce je nyní dokázáno, že pro zadanou rekurentní posloupnost f platí $f(n) = 2^{n+2} - 1$ pro všechna přirozená n. □

Příklad 5.3. *Posloupnost* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je zadaná rekurentní definicí*

$$s_0 = 0 \quad \text{a} \quad s_n = s_{n-1} + n^2$$

pro všechna $n \geq 1$. $\square$ *Dokažte, že* $s_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ *pro všechna přirozená* n.

Řešení: Opět postupujeme matematickou indukcí podle n. $\square$

- Báze $n := 0$: $s_0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot (0+1)(2 \cdot 0 + 1) = 0$, což platí. $\square$
- Indukční krok: za využití $s_{i-1} = \frac{1}{6}(i-1)(i-1+1)(2i-2+1) = \frac{1}{6}(i-1)i(2i-1)$, což je indukční předpoklad pro $n := i-1$ a libovolné $i \geq 1$, upravujeme

$$s_i = s_{i-1} + i^2 = \frac{1}{6}(i-1)i(2i-1) + i^2 = \frac{1}{6}i\left(2i^2 - 3i + 1\right) + i^2 \square$$

$$= \frac{1}{6}i\left(2i^2 - 3i + 1 + 6i\right) = \frac{1}{6}i(i+1)(2i+1),$$

což dokazuje požadovaný vztah $s_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ také pro $n := i$. $\square$

$\square$

Poznámka: Výsledek Příkladu 5.3 je ukázkou tzv. sumačního vzorce pro řadu

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Jinou ukázkou je už dříve zmíněný základní vztah $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

5.2 Induktivní definice množin a funkcí

Přímým zobecněním rekurentních definic posloupností je následující koncept.

Definice 5.4. Induktivní definice množiny.
Jedná se obecně o popis (nějaké) množiny M v následujícím tvaru:

- Je dáno několik pevných (*bázických*) prvků $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$. □
- Je dán soubor *induktivních pravidel* typu

  Jsou-li (libovolné prvky) $x_1, \ldots, x_\ell \in M$, pak také $y \in M$.

  V tomto případě je y typicky funkcí $y = f_i(x_1, \ldots, x_\ell)$. □

Pak naše *induktivně definovaná množina* M je určena jako nejmenší (inkluzí) množina vyhovující všem těmto pravidlům.

Několik ukázek. . .

- Pro nejbližší příklad induktivní definice se obrátíme na množinu všech přirozených čísel, která je formálně zavedena následovně.
  - $0 \in \mathbb{N}$
  - Je-li $i \in \mathbb{N}$, pak také $succ(i) \in \mathbb{N}$ (kde následník $succ(i)$ odpovídá $i+1$).

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to \dots$$

- Pro každé $y \in \mathbb{N}$ můžeme definovat jinou množinu $M_y \subseteq \mathbb{N}$ induktivně:
  - $y \in M_y$
  - Jestliže $x \in M_y$ a $x+1$ je liché, pak $x+2 \in M_y$.

  Pak například $M_3 = \{3\}$, nebo $M_4 = \{4 + 2i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

- Dalším příkladem induktivní definice je už známé zavedení výrokových formulí z Oddílu 1.4. Uměli byste teď přesně říci, co tam byly bázické prvky a jaká byla induktivní pravidla? A jaká byla v definici formulí role závorek?

Jednoznačnost induktivních definic

Definice: Řekneme, že daná induktivní definice množiny M je *jednoznačná*, právě když každý prvek M lze odvodit z bázických prvků pomocí induktivních pravidel právě jedním způsobem. □

- Definujme například množinu $M \subseteq \mathbb{N}$ induktivně takto:
  - $2, 3 \in M$
  - Jestliže $x, y \in M$ a $x \leq y$, pak také $x^2 + y^2$ a $x \cdot y$ jsou prvky M.

  Proč tato induktivní definice není jednoznačná? □Například číslo $8 \in M$ lze odvodit způsobem $8 = 2 \cdot (2 \cdot 2)$, ale zároveň zcela jinak $8 = 2^2 + 2^2$. □

- V čem tedy spočívá důležitost jednoznačných induktivních definic množin? Je to především v dalším možném využití induktivní definice množiny jako „základny" pro odvozené vyšší definice, viz následující.

Definice 5.5. Induktivní definice funkce z induktivní množiny.

Nechť množina M je dána jednoznačnou induktivní definicí. Pak říkáme, že funkce $\mathcal{F} : M \to X$ je definována *induktivně* (vzhledem k induktivní definici M), pokud je řečeno:

- Pro každý z bázických prvků $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$ je určeno $\mathcal{F}(a_i) = c_i$. □
- Pro každé induktivní pravidlo typu

  "Jsou-li (libovolné prvky) $x_1, \ldots, x_\ell \in M$, pak také $f(x_1, \ldots, x_\ell) \in M$"

  je definováno

  $\boldsymbol{\mathcal{F}\big(\, f(x_1, \ldots, x_\ell)\,\big)}$ na základě hodnot $\boldsymbol{\mathcal{F}(x_1), \ldots, \mathcal{F}(x_\ell)}$. □

Ilustrujme si induktivní definici funkce dětskou hrou na „tichou poštu“. Definičním oborem je řada sedících hráčů, kde ten první je bázickým prvkem a každý následující (mimo posledního) odvozuje hráče sedícího hned za ním jako další prvek hry.

Hodnotou bázického prvku je první (vymyšlené) posílané slovo. Induktivní pravidlo pak následujícímu hráči přiřazuje slovo, které je odvozeno („zkomolením“) ze slova předchozího hráče. Výsledkem hry pak je hodnota–slovo posledního hráče.

Pro další příklad se podívejme třeba do manuálu unixového příkazu `test EXPRESSION`:

```
EXPRESSION is true or false and sets exit status.  It is one of:
 ( EXPRESSION )                 EXPRESSION is true
 ! EXPRESSION                   EXPRESSION is false
 EXPRESSION1 -a EXPRESSION2     both EXPRESSION1 and EXPRESSION2 are true
 EXPRESSION1 -o EXPRESSION2     either EXPRESSION1 or EXPRESSION2 is true
 [-n] STRING                    the length of STRING is nonzero
 STRING1 = STRING2              the strings are equal
   ......
```

No, problematická je otázka jednoznačnosti této definice – jednoznačnost není vynucena (jen umožněna) syntaktickými pravidly, jinak je pak dána nepsanými konvencemi implementace příkazu.

To je pochopitelně z matematického hlediska špatně, ale přesto jde o pěknou ukázku z praktického života informatika.

5.3 Použití strukturální indukce

Příklad 5.6. *Jednoduché aritmetické výrazy a jejich význam.*

Nechť je dána abeceda $\Sigma = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\odot,\oplus,(,)\}$. Definujme množinu *jednoduchých výrazů* $SExp \subseteq \Sigma^*$ induktivně takto:

- Dekadický zápis každého přirozeného čísla **n** je prvkem $SExp$ (bázické prvky). □
- Jestliže $x, y \in SExp$, pak také $(x) \odot (y)$ a $(x) \oplus (y)$ jsou prvky $SExp$. □
- Jak snadno nahlédneme, díky nucenému závorkování je tato induktivní definice jednoduchých výrazů $SExp$ jednoznačná.

Tímto jsme aritmetickým výrazům přiřadili jejich „formu“, tedy *syntaxi*. □

Pro přiřazení „významu“, tj. *sémantiky* aritmetického výrazu, následně definujme funkci vyhodnocení $\mathit{Val} : SExp \to \mathbb{N}$ induktivně takto: □

- Pro bázické prvky: $\mathit{Val}(\mathbf{n}) = n$, kde **n** je dekadický zápis přirozeného čísla n. □
- První induktivní pravidlo: $\mathit{Val}((x) \oplus (y)) = \mathit{Val}(x) + \mathit{Val}(y)$.
- Druhé induktivní pravidlo: $\mathit{Val}((x) \odot (y)) = \mathit{Val}(x) \cdot \mathit{Val}(y)$. □

Co je pak „správným významem“ (hodnotou) uvedených aritmetických výrazů? □

Příklad 5.7. *Důkaz správnosti přiřazeného „významu“ $\mathit{Val} : \mathit{SExp} \to \mathbb{N}$.*

> **Věta**. *Pro každý výraz $\sigma \in \mathit{SExp}$ je hodnota $\mathit{Val}(\sigma)$ číselně rovna výsledku vyhodnocení výrazu σ podle běžných zvyklostí aritmetiky.* □

Jelikož pojednáváme o induktivně definované funkci *Val*, je přirozené pro důkaz jejích vlastností aplikovat matematickou indukci. Avšak na rozdíl od dříve probíraných příkladů zde nevidíme žádný celočíselný „parametr n“, a proto si jej budeme muset nejprve definovat podle struktury výrazu σ. □

Přesněji, naši indukci povedeme podle „délky ℓ odvození výrazu σ“ definované jako počet aplikací induktivních pravidel potřebných k odvození $\sigma \in \mathit{SExp}$.

□

Důkaz: V bázi indukce ověříme vyhodnocení bázických prvků. Platí $\mathit{Val}(\mathbf{n}) = n$, což skutečně odpovídá zvyklostem aritmetiky. □

V indukčním kroku se podíváme na vyhodnocení $\mathit{Val}((x) \oplus (y)) = \mathit{Val}(x) + \mathit{Val}(y)$. □ Podle běžných zvyklostí aritmetiky by hodnota $\mathit{Val}((x) \oplus (y))$ měla být rovna součtu vyhodnocení výrazu x, což je podle indukčního předpokladu rovno $\mathit{Val}(x)$ (x má zřejmě kratší délku odvození), a vyhodnocení výrazu y, což je podle indukčního předpokladu rovno $\mathit{Val}(y)$. □ Takže skutečně $\mathit{Val}((x) \oplus (y)) = \mathit{Val}(x) + \mathit{Val}(y)$.

Druhé pravidlo $\mathit{Val}((x) \odot (y))$ se dořeší analogicky. □

5.4 Nazpět k matematické logice

Vybaveni aparátem induktivních definic, můžeme nyní podat matematicky přesnější definici formulí výrokové logiky z Oddílu 1.4 a jejich sémantiky.

Definice: Nechť $\mathcal{P} = \{A, B, C, \dots\}$ je množina výrokových proměnných. Množina $\mathcal{F}$ výrokových formulí je dána těmito pravidly induktivní definice:

* Bázickými prvky $\mathcal{F}$ jsou proměnné $\mathcal{P}$, tj. $X \in \mathcal{F}$ pro každé $X \in \mathcal{P}$. □
* (*negace*) Je-li $\varphi \in \mathcal{F}$, pak také $\neg(\varphi)$ je prvkem $\mathcal{F}$.□
* (*implikace*) Je-li $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$, pak také $(\varphi) \Rightarrow (\psi)$ je prvkem $\mathcal{F}$.□

Zároveň platí, že závorky okolo φ lze vynechat pouze pokud $\varphi \in \mathcal{P}$ nebo φ bylo vytvořeno induktivním pravidlem negace. To stejné platí pro vynechávání závorek okolo ψ. □

Poznámka: Již nad rámec předchozí definice patří dříve uvedené syntaktické zkratky

* $\varphi \vee \psi$ (*disjunkce* / „nebo“) je jiný zápis formule $\neg\varphi \Rightarrow \psi$,
* $\varphi \wedge \psi$ (*konjunkce* / „a“) je jiný zápis formule $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,
* $\varphi \Leftrightarrow \psi$ (*ekvivalence*) je jiný zápis formule $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$.

Sémantika výrokové logiky

Na základě jednoznačné induktivní definice množiny $\mathcal{F}$ výrokových formulí nyní můžeme podat přesnou induktivní definici funkce vyhodnocení (logické hodnoty formulí). Nechť *valuace* (ohodnocení) je funkce $\nu : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$.

Definice 5.8. Sémantika (význam) výrokové logiky.
Pro každou valuaci ν definujeme funkci

$$\mathcal{S}_\nu : \mathcal{F} \to \{0, 1\},$$

zvanou *vyhodnocení* formule σ vzhledek k ν, induktivně takto:

- $\mathcal{S}_\nu(X) := \nu(X)$ pro každé $X \in \mathcal{P}$.
- $\mathcal{S}_\nu(\neg\varphi) := \begin{cases} 1 & \text{jestliže } \mathcal{S}_\nu(\varphi) = 0; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$
- $\mathcal{S}_\nu(\varphi \Rightarrow \psi) := \begin{cases} 0 & \text{jestliže } \mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1 \text{ a } \mathcal{S}_\nu(\psi) = 0; \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$

Převod formulí do normálního tvaru

V dalším se vrátíme k logickým formulím v normálním tvaru (viz Oddíl 2.2), tedy k formulím, ve kterých se negace vztahuje pouze k výrokovým proměnným.

Tvrzení 5.9. *Každou výrokovou formuli lze převést do normálního tvaru, pokud k* $\Rightarrow$ *povolíme i užívání odvozených spojek* $\wedge$ *a* $\vee$. □

- Pro ilustraci, k formuli $\neg(A \Rightarrow B)$ je ekvivalentní normální tvar $A \wedge \neg B$, □
- k formuli $\neg\big(C \wedge (\neg A \Rightarrow B)\big)$ je ekvivalentní $\neg C \vee (\neg A \wedge \neg B)$, □
- k formuli $\neg\big((A \Rightarrow B) \Rightarrow C\big)$ je ekvivalentní $(A \Rightarrow B) \wedge \neg C$.

Metoda 5.10. Převod formule φ do normálního tvaru $\mathcal{F}(\varphi)$.
Používáme $\mathcal{F}(X)$ jako „je pravda, že X“ a $\mathcal{G}(X)$ jako „není pravda, že X“.

$$\begin{array}{rclrcl}
\mathcal{F}(A) & = & A & \mathcal{G}(A) & = & \neg A \\
\mathcal{F}(\neg\varphi) & = & \mathcal{G}(\varphi) & \mathcal{G}(\neg\varphi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \\
\mathcal{F}(\varphi\Rightarrow\psi) & = & \mathcal{F}(\varphi)\Rightarrow\mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi\Rightarrow\psi) & = & \mathcal{F}(\varphi)\wedge\mathcal{G}(\psi) \\
\mathcal{F}(\varphi\wedge\psi) & = & \mathcal{F}(\varphi)\wedge\mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi\wedge\psi) & = & \mathcal{G}(\varphi)\vee\mathcal{G}(\psi) \\
\mathcal{F}(\varphi\vee\psi) & = & \mathcal{F}(\varphi)\vee\mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi\vee\psi) & = & \mathcal{G}(\varphi)\wedge\mathcal{G}(\psi) \\
\mathcal{F}(\varphi\Leftrightarrow\psi) & = & \mathcal{F}(\varphi)\Leftrightarrow\mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi\Leftrightarrow\psi) & = & \mathcal{F}(\varphi)\Leftrightarrow\mathcal{G}(\psi)\,\Box
\end{array}$$

Pro predikátové formule toto rozšíříme ještě o pravidla:

$$\begin{array}{rclrcl}
\mathcal{F}(\forall x\,.\,\varphi) & = & \forall x\,.\,\mathcal{F}(\varphi) & \mathcal{G}(\forall x\,.\,\varphi) & = & \exists x\,.\,\mathcal{G}(\varphi) \\
\mathcal{F}(\exists x\,.\,\varphi) & = & \exists x\,.\,\mathcal{F}(\varphi) & \mathcal{G}(\exists x\,.\,\varphi) & = & \forall x\,.\,\mathcal{G}(\varphi)\,\Box
\end{array}$$

Uvažme formuli $\neg(A\Rightarrow\neg(B\vee\neg(C\Rightarrow\neg A)))$. Užitím uvedeného postupu získáme:

$$\begin{array}{lcll}
\mathcal{F}(\neg(A\Rightarrow\neg(B\vee\neg(C\Rightarrow\neg A)))) & = & \mathcal{G}(A\Rightarrow\neg(B\vee\neg(C\Rightarrow\neg A))) & =\Box \\
\mathcal{F}(A)\wedge\mathcal{G}(\neg(B\vee\neg(C\Rightarrow\neg A))) & = & A\wedge\mathcal{F}(B\vee\neg(C\Rightarrow\neg A)) & =\Box \\
A\wedge(\mathcal{F}(B)\vee\mathcal{F}(\neg(C\Rightarrow\neg A))) & = & A\wedge(B\vee\mathcal{G}(C\Rightarrow\neg A)) & =\Box \\
A\wedge(B\vee(\mathcal{F}(C)\wedge\mathcal{G}(\neg A))) & = & A\wedge(B\vee(C\wedge\mathcal{F}(A))) & =\Box \\
A\wedge(B\vee(C\wedge A)) & & &
\end{array}$$

Důkaz pro normální tvar formule

Na závěr následuje další ilustrativní ukázka důkazu strukturální indukcí.

Věta 5.11. *Pro libovolnou výrokovou formuli φ platí (viz Metoda 5.10), že*

a) $\mathcal{F}(\varphi)$ je formule v normálním tvaru ekvivalentní k φ

b) a $\mathcal{G}(\varphi)$ je formule v normálním tvaru ekvivalentní negaci $\neg\varphi$. □

Důkaz povedeme indukcí ke struktuře formule, neboli indukci povedeme podle „délky" ℓ – počtu aplikací induktivních pravidel při sestavování formule φ. □

- Báze indukce ($\ell = 0$): Pro všechny atomy, tj. výrokové proměnné, zřejmě platí, že $\mathcal{F}(A) = A$ je ekvivalentní A a $\mathcal{G}(A) = \neg A$ je ekvivalentní $\neg A$. □
- V indukčním kroku předpokládejme, že a) i b) platí pro všechny formule φ délky nejvýše ℓ. Vezmeme si formuli ψ délky $\ell+1$, která je utvořená jedním z následujících způsobů:

* $\psi \equiv \neg\varphi$.
  Podle výše uvedeného induktivního předpisu je $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\neg\varphi) = \mathcal{G}(\varphi)$. Podle indukčního předpokladu pak je $\mathcal{G}(\varphi)$ formule v normálním tvaru ekvivalentní $\neg\varphi = \psi$. $\square$
  Obdobně pro funktor $\mathcal{G}$ vyjádříme $\mathcal{G}(\psi) = \mathcal{G}(\neg\varphi) = \mathcal{F}(\varphi)$. Podle indukčního předpokladu pak je $\mathcal{F}(\varphi)$ formule v normálním tvaru ekvivalentní φ a to je dále ekvivalentní $\neg\neg\varphi = \neg\psi$ podle Tvrzení 1.11. $\square$

* $\psi \equiv (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$.
  Podle výše uvedeného induktivního předpisu je $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\varphi_1) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi_2)$. Podle indukčního předpokladu jsou $\mathcal{F}(\varphi_1)$ i $\mathcal{F}(\varphi_2)$ formule v normálním tvaru ekvivalentní φ_1 a φ_2. Potom i $\mathcal{F}(\varphi_1) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi_2)$ je v normálním tvaru dle definice a podle sémantiky $\Rightarrow$ je ta ekvivalentní formuli $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \psi$. $\square$
  Obdobně rozepíšeme $\mathcal{G}(\psi) = \mathcal{G}(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\varphi_1) \wedge \mathcal{G}(\varphi_2)$. Jelikož $\wedge$ je pro nás jen zkratka, výraz dále rozepíšeme $\mathcal{G}(\psi) = \neg(\mathcal{F}(\varphi_1) \Rightarrow \neg\mathcal{G}(\varphi_2))$. Podle indukčního předpokladu (a dvojí negace) jsou $\mathcal{F}(\varphi_1)$ a $\neg\mathcal{G}(\varphi_2)$ po řadě ekvivalentní formulím φ_1 a φ_2. Tudíž nakonec odvodíme, že $\mathcal{G}(\psi)$ je ekvivalentní negaci formule $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$, což jsme zde měli dokázat.

* $\psi \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2)$.
  Zde si musíme opět uvědomit, že spojka $\vee$ je pro nás jen zkratka, a přepsat $\psi \equiv (\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$. Potom podle předchozích dokázaných případů víme, že $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\neg\varphi_1) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi_2)$ je ekvivalentní formuli $(\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \psi$, což bylo třeba dokázat. Stejně tak $\mathcal{G}(\psi) = \mathcal{G}(\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\neg\varphi_1) \wedge \mathcal{G}(\varphi_2)$ je podle předchozích případů důkazu ekvivalentní $(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = \neg\psi$. $\square$
* $\psi \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ a $\psi \equiv (\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ už dokončíme analogicky.

$\square$