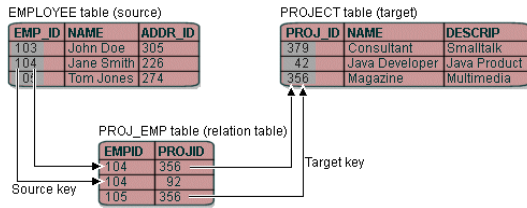


6 Relace a jejich vlastnosti

V následující lekci si podrobně rozebereme matematický aparát relací, kterému se v jeho abstraktní podobě mnoho pozornosti v dřívější výuce nevěnuje – na rozdíl od naivního pohledu na množiny a na „funkce“ ve významu analytických funkcí (jako $2x$, $\sin x$). Přitom na pojem relace velmi brzy narazí každý informatik už jen při studiu dat a databází a jeho pochopení bude nezbytně potřebovat.



Stručný přehled lekce

- * Co je relace – reprezentace relací tabulkou a grafem.
- * Základní vlastnosti binárních relací nad množinou.
- * Uzávěry relací. Tranzitivní relace.

Zopakování kartézského součinu a relace

Definice: *Kartézský součin* dvou množin A, B definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic ze složek z A a B

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}. \square$$

Definice *kartézského součinu* více množin: Pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_i \in A_i \text{ pro každé } 1 \leq i \leq k\}.$$

- Například $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \mathbb{Z}\}. \square$

Definice: *Relace* mezi množinami A_1, A_2, \dots, A_k , pro $k \in \mathbb{N}$, je *libovolná* podmnožina kartézského součinu

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k. \square$$

Pokud $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = A$, hovoříme o *k -ární relaci R na A* .

6.1 Reprezentace konečných relací

Ukládání dat – především sleduje vztahy mezi objekty (stejně jako relace).

↪ relační databáze jako obecná ukázka použití relace.

Příklad 6.1. Tabulka relační databáze prezentuje obecnou relaci.

Definujme následující množiny („elementární typy“)

- $ZNAK = \{a, \dots, z, A, \dots, Z, mezera\}$,
- $CISLICE = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.□

Dále definujeme tyto množiny („odvozené typy“)

- $JMENO = ZNAK^{15}$, $PRIJMENI = ZNAK^{20}$, $VEK = CISLICE^3$,
- $ZAMESTNANEC$ „ \in “ $JMENO \times PRIJMENI \times VEK$.□

Relaci „typu“ $ZAMESTNANEC$ pak lze reprezentovat tabulkou:

JMENO	PRIJMENI	VEK
Jan	Novák	42
Petr	Vichr	28
Pavel	Zíma	26
Stanislav	Novotný	52

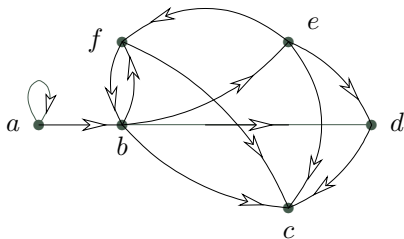
□

Reprezentace binárních relací na množině

Značení: Binární relaci $R \subseteq M \times M$ lze jednoznačně znázornit jejím *grafem*:

- Prvky M znázorníme jako body v rovině (tj. na papíře).
- Prvek $(a, b) \in R$ znázorníme jako *orientovanou hranu* („šipku“) z a do b .
Je-li $a = b$, pak je touto hranou „smyčka“ na a . □

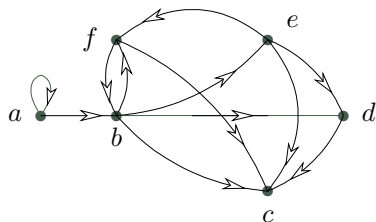
Například mějme $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ a $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (d, c), (e, c), (f, c), (e, d), (e, f), (f, b)\}$, pak:



Pozor, nejedná se o „grafy funkcí“ známé třeba z matematické analýzy. □

V případě, že M je nekonečná nebo „velká“, může být reprezentace R jejím grafem nepraktická (záleží také na míře „pravidelnosti“ R).

Značení: Binární relaci $R \subseteq M \times M$ lze jednoznačně zapsat také pomocí *matice* relace – matice A typu $M \times M$ s hodnotami z $\{0, 1\}$.



→

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

□

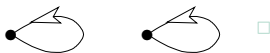
A závěrem se můžeme opět vrátit k reprezentaci tabulkou...

JMENO	PRIJMENI
Jan	Novák
Petr	Vichr
Pavel	Zíma
Stanislav	Novotný

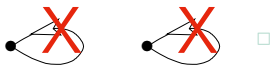
6.2 Vlastnosti binárních relací na množině

Definice 6.2. Necht' $R \subseteq M \times M$. Binární relace R je

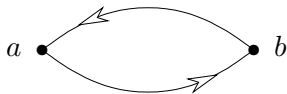
- *reflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a, a) \in R$;



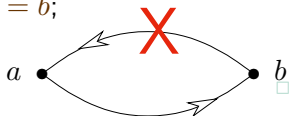
- *ireflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a, a) \notin R$;



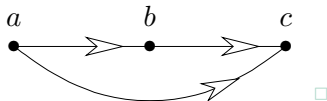
- *symetrická*, právě když pro každé $a, b \in M$ platí, že jestliže $(a, b) \in R$, pak také $(b, a) \in R$;



- *antisymetrická*, právě když pro každé $a, b \in M$ platí, že jestliže $(a, b), (b, a) \in R$, pak $a = b$;



- *tranzitivní*, právě když pro každé $a, b, c \in M$ platí, že jestliže $(a, b), (b, c) \in R$, pak také $(a, c) \in R$.



Pozor, může být relace *symetrická i antisymetrická zároveň*? □



Ano!

Ukázkové binární relace

Příklad 6.3. *Jak poznat vlastnosti relací z matice:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Které z vlastností mají binární relace reprezentované těmito maticemi? □

Řešení: Ony vlastnosti si probereme jednu po druhé:

- Reflexivní, právě když každý prvek na hlavní diagonále je 1. □
- Ireflexivní, právě když je její hlavní diagonála vyplněna nulami. □
- Symetrická, právě když je „stejná“ v zrcadlovém obraze podle hl. diagonály.
- Antisymetrická, právě když po „přeložení“ matice podle hlavní diagonály nebudou nikde mimo tuto diagonálu dvě jedničky „na sobě“. □
- Zbývá posoudit tranzitivitu, což není úplně jednoduché. . .

□

Příklad 6.4. Několik příkladů relací definovaných v přirozeném jazyce.

Nechť M je množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace $R \subseteq M \times M$ definované takto

- $(x, y) \in R$ právě když x a y mají stejné rodné číslo; □
- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou výšku jako y (dejme t. na celé mm); □
- $(x, y) \in R$ právě když výška x a y se neliší více jak o 2 mm; □
- $(x, y) \in R$ právě když x má alespoň takovou výšku jako y ; □
- $(x, y) \in R$ právě když x má jinou výšku než y (dejme tomu na celé mm); □
- $(x, y) \in R$ právě když x je zamilován(a) do y . □

□

Co dělat v situaci, že naše relace některou z poptávaných vlastností nemá, ale nám by se ta vlastnost hodila? □ V některých případech lze chybějící vlastnost relaci „doplnit“ pomocí takzvaného **uzávěru**.

- Například reflexivní uzávěr jednoduše přidá do relace všechny dvojice (x, x) .
- Nebo symetrický uzávěr zahrne do relace všechny obrácené dvojice k existujícím dvojicím, čili všechny chybějící (x, y) pokud $(y, x) \in R$.

6.3 Uzávěry relací

Princip uzávěru binární relace:

- Naší snahou je danou relaci „obohatit“ o zvolenou vlastnost (například proto, že naše data o relaci jsou neúplná a vlastnost je tak poškozena). □
- Pochopitelně, ne každou vlastnost relace lze získat přidáváním dalších dvojic; naše uvažovaná vlastnost musí být *uzavíratelná*. □

Fakt: Libovolná kombinace vlastností *reflexivita*, *symetrie*, *tranzitivita* je uzavíratelná vlastnost.

Ireflexivita a antisymetrie naopak *nejsou* uzavíratelné vlastnosti. □

Věta 6.5. *Nechť V je uzavíratelná vlastnost binárních relací. Pak existuje jed-
noznačná minimální relace $R^V \supseteq R$ mající vlastnost V . Platí*

$$R^V = \bigcap_{S \supseteq R, S \text{ má } V \text{ na } M} S.$$

Tuto minimální relaci R^V s vlastností V nazýváme *V -uzávěr* relace R .

Tvrzení 6.6. Necht' R je binární relace na M . Pak platí následující poznatky.

- **Reflexivní uzávěr** R je přesně relace $R \cup \{(x, x) \mid x \in M\}$. \square

- **Symetrický uzávěr** R je přesně relace

$$\overset{\leftrightarrow}{R} = \{(x, y) \mid (x, y) \in R \text{ nebo } (y, x) \in R\}. \square$$

- **Tranzitivní uzávěr** R je přesně relace $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}^i(R)$, kde \mathcal{T} je zobrazení, které pro každou binární relaci S vrátí relaci

$$\mathcal{T}(S) := S \cup \{(x, z) \mid \text{existuje } y \text{ takové, že } (x, y), (y, z) \in S\}$$

a $\mathcal{T}^i(S) = \underbrace{\mathcal{T}(\mathcal{T} \dots (\mathcal{T}(S)) \dots)}_i$ je i -krát iterovaná aplikace zobrazení \mathcal{T} . \square

- Reflexivní a tranzitivní uzávěr R je přesně relace $R^* = Q^+$, kde Q je reflexivní uzávěr R . \square
- Reflexivní, symetrický a tranzitivní uzávěr R (tj. nejmenší ekvivalence obsahující R) je přesně relace $(\overset{\leftrightarrow}{Q})^+$, kde Q je reflexivní uzávěr R . \square

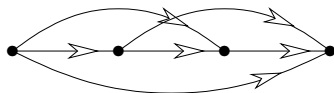
Poznámka: Na pořadí aplikování uzávěrů vlastností záleží! Zhruba řečeno, tranzitivní uzávěr obvykle aplikujeme coby poslední.

Tranzitivní uzávěr

Závěrem se sestavíme nad případem tranzitivního uzávěru $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}^i(R)$, jehož definice se nezdá až tak „konstruktivní“ – co nekonečné sjednocení? \square

Tvrzení 6.7. *Nechť R je relace na konečné množině. Pak existuje přirozené m takové, že tranzitivní uzávěr relace R lze zapsat $R^+ = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{T}^i(R)$.* \square

Důkaz: Pro něj si uvědomme zásadní fakt – pokud $\mathcal{T}^{i+1}(R) = \mathcal{T}^i(R)$, tak už platí $\mathcal{T}^{i+k}(R) = \mathcal{T}^i(R)$ pro všechna přirozená k . Neboli je potřeba sjednotit jen tolik prvních členů výrazu $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}^i(R)$, dokud se hodnota $\mathcal{T}^i(R)$ „zvětšuje“, což může nastat jen konečně krát nad konečnou množinou.



\square

6.4 Tranzitivní relace

Mezi základními vlastnostmi relací popsanými Definicí 6.2 je jedna – **tranzitivita**, jejíž uchopení a zvládnutí je výrazně těžší než u ostatních vlastností. □

- Definice reflexivity, symetrie či antisymetrie nám ihned řeknou, které dvojice v relaci chybí nebo přebývají. □
- Avšak vlastnost tranzitivity je fundamentálně **induktivní** – všimněte si tranzitivního uzávěru, kde po každém přidání dvojice je nutno znovu podmínku tranzitivity kontrolovat, což „indukuje“ nové dvojice k přidávání. □

Tvrzení 6.8. *Mějme relaci R na kon. množině M a necht' R^+ je tranzitivním uz. R . Pak pro každé $x, y \in M$ platí $(x, y) \in R^+$ právě tehdy, když existují $z_0, z_1, \dots, z_k \in M$ takové, že $z_0 = x, z_k = y$ a $(z_{i-1}, z_i) \in R$ pro $i = 1, \dots, k$. □*

Tvrzení 6.8 o tranzitivním uzávěru R^+ je potřeba (neformálně) číst takto:

Do tranzitivního uzávěru patří všechny ty dvojice (x, y) , že v původní relaci R se lze „dostat po šipkách“ z x do y . Pro ilustraci:



S tranzitivními relacemi (mezi objekty) se nejčastěji setkáváme, pokud tyto objekty porovnáváme vztahy „je stejný jako“ nebo „je větší/lepší než“. □

Definice 6.9. Daná binární relace R je

- * relace *ekvivalence*, právě když je R reflexivní, symetrická a tranzitivní; □
- * *částečné uspořádání*, právě když je R reflexivní, antisymetrická a tranzitivní (často říkáme jen *uspořádání*). □

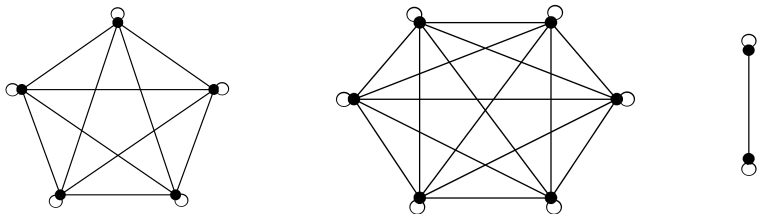
Příklad 6.10. *Jaké vlastnosti mají následující relace?*

- Bud' $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná takto $(x, y) \in R$ právě když x dělí y . □
(*Částečné uspořádání*, ale ne každá dvě čísla jsou porovnatelná.) □
- Bud' $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná takto $(x, y) \in R$ právě když x a y mají stejný zbytek po dělení číslem 5. □ (*Ekvivalence*.) □
- Necht' $F = \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$ je množina funkcí. Bud' $R \subseteq F \times F$ definovaná takto $(f, g) \in R$ právě když $f(x) < g(x)$ pro všechna x . □ (*Irreflexivní, antisymetrická a tranzitivní*, ale **ne** reflexivní – není uspořádáním.) □

□

Příklad 6.11. Jak vypadá graf relace ekvivalence? □

Poměrně příznačně, jak nám ukazuje následující obrázek (všimněte si absence šipek, která je dána symetrií relace).



Neformálně řečeno; ekvivalence je relace $R \subseteq M \times M$, taková, že $(x, y) \in R$ právě když x a y jsou v nějakém smyslu „stejné“ (leží na stejné hromádce). □

Tyto hromádky pak nazýváme komponentami či třídami ekvivalence dané relace. □