

IB107 Vyčísitelnost a složitost

r.e. množiny a jejich standardní numerace

Jan Strejček

Fakulta informatiky
Masarykova univerzita

Definice 7.1 (rekurzivně spočetná množina)

Množina $B \subseteq \mathbb{N}$ je *rekurzivně spočetná*, právě když $B = \emptyset$ nebo existuje totálně vyčíslitelná funkce $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že $B = \text{range}(f)$. Funkce f se nazývá *numerující funkce* pro B .

- rekurzivně spočetné množině se také říká *částečně rozhodnutelná*, *rekurzivně vyčíslitelná* nebo jen *r.e.* (z anglického recursively enumerable).
- definici lze rozšířit na množiny $B \subseteq \mathbb{N}^k$

Věta 7.6

Každá rekurzivní množina $A \subseteq \mathbb{N}$ je také rekurzivně spočetná.

Důkaz:

Věta 7.7

- 1 Existuje množina $A \subseteq \mathbb{N}$, která není rekurzivní.
- 2 Existuje množina $B \subseteq \mathbb{N}$, která není r.e.

Důkaz: (pomocí mohutnosti) Rekurzivních i r.e. množin je spočetně mnoho, ale \mathbb{N} má nespočetně mnoho podmnožin.

(diagonalizací) $A = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(i) \neq 1\}$

$B = \{i \in \mathbb{N} \mid i \notin \text{range}(\varphi_i)\}$

Věta 7.8

Množina $A \subseteq \mathbb{N}$ je rekurzivní, právě když A i \bar{A} jsou r.e.

Důkaz:

\Rightarrow je-li A rekurzivní, pak je rekurzivní i \bar{A} a každá rekurzivní množina je také r.e.

- \Leftarrow
- je-li $A = \emptyset$ nebo $\bar{A} = \emptyset$, pak A je rekurzivní
 - nechť $A \neq \emptyset \neq \bar{A}$ jsou r.e., pak $A = \text{range}(f)$ a $\bar{A} = \text{range}(g)$ pro nějaké totálně vyčíslitelné funkce $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 - platí $\text{range}(f) \cap \text{range}(g) = \emptyset$ a $\text{range}(f) \cup \text{range}(g) = \mathbb{N}$
 - charakteristickou funkci $\chi_A(x)$ počítáme takto:
 1. počítáme $f(0), g(0), f(1), g(1), \dots$ dokud nedostaneme x
 2. pokud $x = f(n)$ pro nějaké n , pak vrátíme 1
 3. pokud $x = g(n)$ pro nějaké n , pak vrátíme 0
 - χ_A je vyčíslitelná, tedy A je rekurzivní

- rozšíříme jazyk while-programů o příkaz *output(x_i)*

Tvrzení

*Množina $A \subseteq \mathbb{N}$ je r.e., právě když existuje program P (bez vstupních proměnných), který pomocí instrukce *output* během svého (potenciálně nekonečného) běhu dá na výstup právě všechny prvky množiny A .*

Důkaz:

- ←
- pokud program P na výstup nic nedá, pak $A = \emptyset$ je r.e.
 - nechť program generuje množinu výstupů $A \neq \emptyset$
 - nechť $a \in A$, pak $A = \text{range}(f)$ pro

$$f(x) = \begin{cases} y & \text{pokud } P \text{ dá v } x\text{-tém kroku na výstup } y \\ a & \text{jinak} \end{cases}$$

- f je totálně vyčíslitelná

- ⇒
- pro $A = \emptyset$ zřejmé
 - nechť $A = \text{range}(f)$ pro totálně vyčíslitelnou funkci $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 - nechť f je počítána programem P_e
 - pak A je generována tímto programem

begin

$n := 0;$

while true do begin

$x := \pi_1(n);$

$y := \pi_2(n);$

if $Sc(e, x, y) = 1$ **then begin** $x_1 := f(x);$ $output(x_1)$ **end;**

$n := n + 1$

end

end



Problém rozhodnout, zda dané x má vlastnost V , ztotožníme s množinou $\{x \mid x \text{ má vlastnost } V\}$.

Příklad: problém rozhodnout, zda n je prvočíslo, ztotožníme s množinou

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je prvočíslo}\}$$

Definice ((částečně) rozhodnutelný a nerozhodnutelný problém)

Problém ztotožněný s množinou M je

- *rozhodnutelný, právě když M je rekurzivní,*
- *nerozhodnutelný, právě když M není rekurzivní,*
- *částečně rozhodnutelný neboli semirozhodnutelný, právě když M je r.e.*

Problém zastavení, tedy problém, zda program P_i zastaví na vstupu i , ztotožníme s množinou

$$\begin{aligned} K &= \{i \in \mathbb{N} \mid P_i \text{ zastaví nad vstupem } i\} \\ &= \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(i) \text{ je definováno}\}. \end{aligned}$$

Dříve jsme dokázali, že charakteristická funkce

$$\chi_K(i) = f(i) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } \varphi_i(i) \text{ je definováno} \\ 0 & \text{jestliže } \varphi_i(i) \text{ není definováno} \end{cases}$$

není vyčíslitelná. Tedy K není rekurzivní a **problém zastavení je nerozhodnutelný**.

Věta 7.10

Množina $K = \{i \mid \varphi_i(i) \text{ je definováno}\}$ je rekurzivně spočetná.

Důkaz: Množina K je generována programem

begin

$n := 0;$

while true do begin

$x := \pi_1(n);$

$y := \pi_2(n);$

if $Sc(x, x, y) = 1$ **then** $output(x);$

$n := n + 1;$

end

end

Proto **problém zastavení je částečně rozhodnutelný.**

Věta 7.11

Množina $\bar{K} = \{i \mid \varphi_i(i) = \perp\}$ není rekurzivně spočetná.

Důkaz:

- množina K je rekurzivně spočetná
- pokud by \bar{K} byla také rekurzivně spočetná, tak by K bylo rekurzivní, což není



Shrnutí:

Definice 7.12

Množina $A \subseteq \mathbb{N}$ je *rekurzivně spočetná v rostoucím pořádku*, právě když má rostoucí numerující funkci.

Lemma 7.13

Nekonečná množina $A \subseteq \mathbb{N}$ je rekurzivní, právě když je rekurzivně spočetná v rostoucím pořádku.

Důkaz:

- ←
- nechť $A = \text{range}(f)$ pro rostoucí totálně vyčíslitelnou funkci f
 - χ_A je počítána programem

```
begin  $n := 0$ ;  
  while  $f(n) < x_1$  do  $n := n + 1$ ;  
  if  $f(n) = x_1$  then  $x_1 := 1$  else  $x_1 := 0$   
end
```

- ⇒
- A je nekonečná a rekurzivní, tedy χ_A je vyčíslitelná
 - A je generována v rostoucím pořádku programem

begin

$n := 0;$

while *true* **do begin**

if $\chi_A(n) = 1$ **then** *output*(n);

$n := n + 1;$

end

end

- funkce $f(i)$ vracející i -tý prvek z generovaného seznamu je totálně vyčíslitelná
- přitom f je rostoucí a $A = \text{range}(f)$
- tedy A je rekurzivně spočetná v rostoucím pořádku



Důsledek 7.14

Každá nekonečná r.e. množina A má nekonečnou rekurzivní podmnožinu B .

Důkaz:

- necht f je numerující funkce pro A
- uvažme podmnožinu $B \subseteq A$, kterou generuje program

begin

$n := 0; m := 0;$

while $true$ do begin

if $f(n) > m$ then begin $m := f(n); output(m)$ end;

$n := n + 1;$

end

end

- B je nekonečná a generovaná v rostoucím pořádku
- tedy B je r.e. v rostoucím pořádku a tudíž rekurzivní

Věta 7.15

- 1 *Množina $A \subseteq \mathbb{N}$ je rekurzivně spočetná, právě když $A = \text{dom}(g)$ pro nějakou vyčíslitelnou funkci $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.*
- 2 *Množina $A \subseteq \mathbb{N}$ je rekurzivně spočetná, právě když $A = \text{range}(g)$ pro nějakou vyčíslitelnou funkci $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.*

Důkaz:

1 A je r.e. $\iff \exists$ vyčíslitelná funkce g tak, že $A = \text{dom}(g)$

- \implies
- $A = \emptyset$
 - $A \neq \emptyset$ je r.e., pak $A = \text{range}(f)$ pro totálně vyčíslitelnou funkci f

1 A je r.e. $\iff \exists$ vyčíslitelná funkce g tak, že $A = \text{dom}(g)$

- \iff
- $A = \text{dom}(g) = \emptyset$
 - $A = \text{dom}(g) \neq \emptyset$, pak necht' $a_0 \in A$

2 A je r.e. $\iff \exists$ vyčíslitelná funkce g tak, že $A = \text{range}(g)$

- \implies
- $A = \emptyset$
 - $A \neq \emptyset$ je r.e., pak $A = \text{range}(f)$ pro totálně vyčíslitelnou funkci f
 - položíme $g = f$
- \impliedby
- $A = \text{range}(g) = \emptyset$
 - $A = \text{range}(g) \neq \emptyset$, pak necht' $a_0 \in A$

$dom(\varphi_0), dom(\varphi_1), dom(\varphi_2), \dots$

$range(\varphi_0), range(\varphi_1), range(\varphi_2), \dots$

Věta 7.16

Existují totálně vyčíslitelné funkce $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $i \in \mathbb{N}$ platí vztahy:

- $1 \quad dom(\varphi_i) = range(\varphi_{f(i)})$
- $2 \quad range(\varphi_i) = dom(\varphi_{g(i)})$

Důkaz:

$$1 \quad \text{dom}(\varphi_i) = \text{range}(\varphi_{f(i)})$$

$$2 \quad \text{range}(\varphi_i) = \text{dom}(\varphi_{g(i)})$$

Definice 7.17 (standardní numerace r.e. množin)

Standardní numerací r.e. množin nazveme funkci $W : \mathbb{N} \rightarrow \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ je r.e.}\}$ definovanou vztahem

$$W(i) = \text{dom}(\varphi_i).$$

Index r.e. množiny $A \subseteq \mathbb{N}$ je číslo i splňující $A = W(i)$.

- místo $W(0), W(1), \dots$ píšeme W_0, W_1, \dots
- množinu W_i lze chápat jako **akceptovanou** programem P_i : program P_i akceptuje $n \in \mathbb{N}$, jestliže P_i zastaví pro vstup n

Definice 7.19 (rekurzivně spočetná relace)

Relace $A \subseteq \mathbb{N}^j$ je *rekurzivně spočetná (r.e.)*, právě když existuje vyčíslitelná funkce $f : \mathbb{N}^j \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že $A = \text{dom}(f)$.

Definice (standardní numerace r.e. relací)

Standardní numerací j -árních r.e. relací nazveme funkci $W^{(j)} : \mathbb{N} \rightarrow \{A \subseteq \mathbb{N}^j \mid A \text{ je r.e.}\}$ definovanou vztahem

$$W^{(j)}(i) = \text{dom}(\varphi_i^{(j)}).$$

Index r.e. relace $A \subseteq \mathbb{N}^j$ je číslo i splňující $A = W^{(j)}(i)$.

Místo $W^{(j)}(0), W^{(j)}(1), \dots$ píšeme $W_0^{(j)}, W_1^{(j)}, \dots$