IB107 Vyčíslitelnost a složitost

uzávěrové vlastnosti rekurzivních a r.e. množin, věta o projekci, 10. Hilbertův problém*

Jan Strejček

Fakulta informatiky
Masarykova univerzita

uzávěrové vlastnosti rekurzivních množin

Třída rekurzivních množin je uzavřená na $\cup$, $\cap$ a doplněk.

Věta 8.2

1. *Nechť $B \subseteq \mathbb{N}$ je rekurzivní množina a $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ je totálně vyčíslitelná funkce. Pak $f^{-1}(B)$ je rekurzivní množina.*
2. *Nechť $A \subseteq \mathbb{N}^k$ a $B \subseteq \mathbb{N}^l$ jsou rekurzivní množiny. Pak $A \times B \subseteq \mathbb{N}^{k+l}$ je rekurzivní množina.*

Důkaz:

■

uzávěrové vlastnosti r.e. množin

$W_i^{(j)} = dom(\varphi_i^{(j)})$

Věta

Pro každé $k, l \geq 1$ existuje totálně vyčíslitelná funkce $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ taková, že pro libovolné r.e. množiny $W_i^{(k)} \subseteq \mathbb{N}^k$ a $W_j^{(l)} \subseteq \mathbb{N}^l$ platí

$$W_i^{(k)} \times W_j^{(l)} = W_{h(i,j)}^{(k+l)}.$$

Důkaz:

■

uzávěrové vlastnosti r.e. množin

Věta 8.4

Existují totálně vyčíslitelné funkce $h_1, h_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *takové, že pro každé r.e. množiny* W_i, W_j *platí:*

1. $W_i \cup W_j = W_{h_1(i,j)}$
2. $W_i \cap W_j = W_{h_2(i,j)}$

Důkaz:

1. $W_i \cup W_j = W_{h_1(i,j)}$

2. $W_i \cap W_j = W_{h_2(i,j)}$

■

uzávěrové vlastnosti rekurzivních a r.e. množin

Důsledek

Pro $A, B \subseteq \mathbb{N}^k$, jejichž symetrický rozdíl $A \div B$ je konečný, platí:

- *A je rekurzivní, právě když B je rekurzivní*
- *A je r.e., právě když B je r.e.*

Důkaz:

■

vlastnosti rekurzivních množin

Tvrzení

Každá nekonečná rekurzivní množina $A \subseteq \mathbb{N}$ *má jak nerekurzivní r.e. podmnožinu, tak i podmnožinu, která není r.e.*

Důkaz:

■

uzávěrové vlastnosti r.e. množin

Věta 8.3

Existuje totálně vyčíslitelné funkce $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *taková, že pro každou vyčíslitelnou funkci* φ_i *a každou r.e. množinu* W_j *platí*

$$\varphi_i(W_j) = W_{f(i,j)}.$$

Důkaz: $\varphi_i(W_j) = \{\varphi_i(a) \mid a \in dom(\varphi_i) \cap W_j\}$

Víme, že existuje tot. vyčíslitelná funkce $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že $range(\varphi_k) = dom(\varphi_{t(k)})$. ■

Věta 8.3

Existuje totálně vyčíslitelné funkce $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ taková, že pro každou vyčíslitelnou funkci φ_i a každou r.e. množinu W_j platí

$$\varphi_i^{-1}(W_j) = W_{g(i,j)}.$$

Důkaz: $\varphi_i^{-1}(W_j) = \{a \mid a \in dom(\varphi_i) \text{ a } \varphi_i(a) \in W_j\}$

$\blacksquare$

projekce a řez relace

Definice 8.5 (projekce a řez)

Nechť $R \subseteq \mathbb{N}^k$ je k-ární relace pro $k \geq 2$. Množina

$$\{(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k) \mid \exists a_i \in \mathbb{N} \text{ tak, že } (a_1, \ldots, a_k) \in R\}$$

se nazývá i-tá projekce relace R. Množina

$$\{(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k) \mid (a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_k) \in R\}$$

se nazývá i-tý řez relace R pro pevně zvolené $b \in \mathbb{N}$.

uzavřenost na projekce a řezy

Věta 8.7

1. *Libovolný řez rekurzivní množiny je rekurzivní množina.*
2. *Libovolný řez r.e. množiny je r.e. množina.*
3. *Libovolná projekce r.e. množiny je r.e. množina.*

Důkaz:

uzavřenost na projekce a řezy

■

Předchozí tvrzení lze formulovat efektivně.

uzavřenost na projekce a řezy

Tvrzení

1. *Projekce rekurzivní množiny nemusí být rekurzivní.*
2. *Libovolná projekce rekurzivní množiny je r.e. množina.*

Důkaz:

■

věta o projekci

Věta 8.6 (věta o projekci, věta o existenčním kvantifikátoru)

Nechť $A \subseteq \mathbb{N}^k$ *je r.e. množina. Pak existuje rekurzivní množina* $B \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ *taková, že A je* $(k+1)$*-ní projekcí množiny B.*

Důkaz:

- pro jednoduchost předpokládejme $k = 1$
- pro vhodné $i \in \mathbb{N}$ platí $A = W_i = dom(\varphi_i)$

■

Důsledek 8.8

Množina je r.e., právě když je projekcí rekurzivní relace.

aplikace

Příklad: Dokažte, že množina $A = \{e \mid 7 \in range(\varphi_e)\}$ je r.e.

shrnutí uzávěrových vlastností

třída rekurzivních množin

- je uzavřená na:
  - $\cup, \cap$ aplikované na relace stejné arity
  - doplněk, $\times$, vzor při totálně vyčíslitelném zobrazení f
  - řez
- není uzavřená na:
  - projekce
- obecně není uzavřená na:
  - obraz při totálně vyčíslitelném zobrazení f
  - vzor při vyčíslitelném zobrazení g

třída r.e. množin

- je uzavřená na:
  - $\cup, \cap$ aplikované na relace stejné arity
  - $\times$, obraz i vzor při vyčíslitelném zobrazení f
  - projekce, řez
- není uzavřená na:
  - doplněk

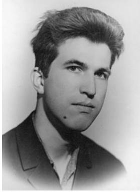
10. Hilbertův problém

10. Hilbertův problém (1900)

Nalezněte algoritmus, který rozhodne, zda polynomická rovnice s celočíselnými koeficienty má celočíselné řešení.

David Hilbert

Diofantos z Alexandrie



Jurij Vladimirovič Matijasevič

10. Hilbertův problém

Definice 8.12 (diofantická relace)

Relace $R \subseteq \mathbb{N}^k$ se nazývá diofantická, právě když existuje polynom $P(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l)$ s celočíselnými koeficienty a $k + l$ proměnnými splňující:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R \iff \begin{array}{l} \exists (b_1, \ldots, b_l) \in \mathbb{N}^l \text{ takové, že} \\ P(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l) = 0 \end{array}$$

Věta (Matijasevič, 1970)

Relace je r.e., právě když je diofantická.