

IB107 Vyčísitelnost a složitost

Riceovy věty, redukce

Jan Strejček

Fakulta informatiky
Masarykova univerzita

Definice 9.2 (respektování funkcí)

Množina $A \subseteq \mathbb{N}$ *respektuje funkce*, jestliže platí

$$i \in A \text{ a } \varphi_i = \varphi_j \implies j \in A.$$

- A respektuje funkce, právě když \bar{A} respektuje funkce
- \emptyset, \mathbb{N}
- konečná neprázdna množina $A \subseteq \mathbb{N}$
- $\{i \mid \varphi_i \text{ je prostá}\}$
- $\{i \mid W_i = \{42\}\}$

1. Riceova věta

Věta 9.1 (1. Riceova věta)

Neprázdná vlastní podmnožina \mathbb{N} (tedy A splňující $\emptyset \neq A \subsetneq \mathbb{N}$), která respektuje funkce, není rekurzivní.

Důkaz: (sporem)

- předpokládejme, že A je rekurzivní
- nechť ϵ je prázdná funkce ($\text{dom}(\epsilon) = \emptyset$) a $\{i \mid \varphi_i = \epsilon\} \subseteq \bar{A}$
- nechť θ je nějaká vyčíslitelná funkce splňující $\{i \mid \varphi_i = \theta\} \subseteq A$
- nechť $f(i)$ je totálně vyčíslitelná funkce vracející kód programu

begin $x_2 := \Phi(i, i)$; $x_1 := \theta(x_1)$ end

- tedy $f(i) \in A \iff i \in K$ a tudíž K je rekurzivní (**spor**)

použití 1. Riceovy věty

$A = \{i \mid \varphi_i \text{ je prostá}\}$ není rekurzivní

Existují nerekurzivní množiny, které nerespektují funkce.
(Jejich nerekurzivita není důsledkem 1. Riceovy věty.)

důsledky 1. Riceovy věty

- 1 Množina všech indexů programů s daným vstupně-výstupním chováním, která není rovna \emptyset nebo \mathbb{N} , není rekurzivní.
- 2 Není rozhodnutelné, zda má funkce φ_i danou netriviální vlastnost, která není závislá na jejím indexu.
- 3 Není rozhodnutelné, zda jsou dvě vyčíslitelné funkce identické (nebo dva algoritmy/while-programy sémanticky ekvivalentní).

1. Riceova věta pro relace

Definice 9.6 (respektování funkcí relacemi)

Množina $R \subseteq \mathbb{N}^k$ *respektuje funkce*, jestliže $(a_1, \dots, a_k) \in R$ a $\varphi_{a_1} = \varphi_{b_1}, \dots, \varphi_{a_k} = \varphi_{b_k}$ *implikuje* $(b_1, \dots, b_k) \in R$.

- $\{(i, j) \mid \varphi_i = \varphi_j\}$
- $\{(i, j, k) \mid \varphi_i(3) + \varphi_j(4) = \varphi_k(5)\}$

Věta 9.7 (1. Riceova věta pro relace)

Nechť $R \subseteq \mathbb{N}^k$ *respektuje funkce*. Pak R je *rekurzivní*, právě když $R = \emptyset$ nebo $R = \mathbb{N}^k$.

2. Riceova věta

Věta 9.9 (2. Riceova věta)

Nechť $A \subseteq \mathbb{N}$ respektuje funkce a nechť existují vyčíslitelné funkce $\theta, \theta' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takové, že $\theta \leq \theta'$ a dále:

- $\{i \mid \varphi_i = \theta\} \subseteq A$
- $\{i \mid \varphi_i = \theta'\} \subseteq \bar{A}$

Pak A není r.e.

Důkaz:

$$\xi(i, j) = \begin{cases} \theta'(j) & \text{je-li } \varphi_i(i) \text{ definováno} \\ \theta(j) & \text{jinak} \end{cases}$$

- ξ je vyčíslitelná (příklad 2.10 ze cvičení)
- existuje TVF f splňující $\xi(i, j) = \varphi_{f(i)}(j)$ (translační lemma)
- pak $f(i) \in A \iff i \in \bar{K}$, tedy $\bar{K} = f^{-1}(A)$
- vzor r.e. množiny při TVF f je r.e. množina
- ovšem \bar{K} není r.e. a proto ani A není r.e.

$B = \{i \mid \varphi_i \text{ není totální}\}$ není r.e.

Existují množiny, které nejsou r.e. a nelze to dokázat 2. Riceovou větou. Například $\{i \mid \varphi_i(x) = 1 \text{ pro všechna } x\}$.

3. Riceova věta

Věta 9.11 (3. Riceova věta)

Nechť $A \subseteq \mathbb{N}$ respektuje funkce a nechť existuje vyčíslitelná funkce $\theta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ splňující:

- $\{i \mid \varphi_i = \theta\} \subseteq A$
- $\{i \mid \varphi_i \leq \theta \text{ a } \text{dom}(\varphi_i) \text{ je konečná množina}\} \subseteq \bar{A}$

Pak A není r.e.

Důkaz:

$$\mu(i, j) = \begin{cases} \perp & \text{jestliže } P_i \text{ zastaví na } i \text{ během } j \text{ kroků} \\ \theta(j) & \text{jinak} \end{cases}$$

- μ je vyčíslitelná
- existuje TVF f splňující $\mu(i, j) = \varphi_{f(i)}(j)$ (translační lemma)
- $i \in \bar{K} \implies \varphi_{f(i)} = \theta \implies f(i) \in A$
- $i \in K \implies \text{dom}(\varphi_{f(i)}) \text{ je konečná a } \varphi_{f(i)} \leq \theta \implies f(i) \in \bar{A}$
- celkem $i \in \bar{K} \iff f(i) \in A$, tedy $\bar{K} = f^{-1}(A) \dots$

použití 3. Riceovy věty

$C = \{i \mid \varphi_i = f\}$, kde f je pevně zvolená totálně vyčíslitelná funkce, není r.e.

Množina všech indexů programů s daným **nekonečným** vstupně-výstupním chováním není rekurzivně spočetná.

Existují množiny, které nejsou r.e. a nelze to o nich dokázat Riceovými větami.

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je dělitelné } 13\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je dělitelné } 26\}$$

$$K = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(i) \text{ je definováno}\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je dělitelné } 26\}$$

Definice 10.1 (m -redukce, m -ekvivalence)

Nechť $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Řekneme, že A se m -redukuje na B , píšeme $A \leq_m B$, právě když existuje totálně vyčíslitelná funkce $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že

$$x \in A \iff f(x) \in B.$$

Funkci f nazveme *redukcí* A na B .

A a B jsou m -ekvivalentní, psáno $A \equiv_m B$, pokud $A \leq_m B$ a $B \leq_m A$.

Platí $A \leq_m B \implies \bar{A} \leq_m \bar{B}$.

Platí $A \leq_m B$ a $B \leq_m C \implies A \leq_m C$ (tj. \leq_m je tranzitivní).

příklad redukce

$$K = \{i \mid \varphi_i(i) \text{ je definováno}\}$$

$$J = \{i \mid \varphi_i(i) = 1\}$$

$$K \leq_m J:$$

příklad redukce

$$K = \{i \mid \varphi_i(i) \text{ je definováno}\}$$

$$J = \{i \mid \varphi_i(i) = 1\}$$

$$J \leq_m K:$$

Věta 10.3

Nechť $A \leq_m B$.

- 1 B je rekurzivní $\implies A$ je rekurzivní
- 2 B je rekurzivně spočetná $\implies A$ je rekurzivně spočetná

Důkaz: $A \leq_m B$, tedy existuje totálně vyčíslitelná funkce f splňující

$$x \in A \iff f(x) \in B$$

- 1 B je rekurzivní, tedy χ_B je totálně vyčíslitelná
- 2 B je r.e., tedy $B = \text{dom}(g)$ pro nějakou vyčíslitelnou funkci g

Důsledek 10.4

Nechť $A \leq_m B$.

- 1** *A není rekurzivní $\implies B$ není rekurzivní*
- 2** *A není rekurzivně spočetná $\implies B$ není rekurzivně spočetná*

Důsledek

Nechť $A \equiv_m B$.

- 1** *A je rekurzivní $\iff B$ je rekurzivní*
- 2** *A je rekurzivně spočetná $\iff B$ je rekurzivně spočetná*

- důkaz (částečné) rozhodnutelnosti A

- důkaz nerozhodnutelnosti B

Věta 10.5

Je-li $A \subseteq \mathbb{N}$ rekurzivně spočetná, pak $A \leq_m K$.

Důkaz: Nechť g je vyčíslitelná funkce splňující $A = \text{dom}(g)$.

```
begin  
   $y := g(i);$   
   $x_1 := 1$   
end
```

Definice 10.6 (těžká a úplná množina)

Nechť \mathbb{C} je třída podmnožin množiny \mathbb{N} a $A \subseteq \mathbb{N}$. Řekneme, že A je **\mathbb{C} -těžká**, právě když pro každou množinu $B \in \mathbb{C}$ platí $B \leq_m A$. Je-li navíc $A \in \mathbb{C}$, pak A nazýváme **\mathbb{C} -úplná** nebo **úplná ve třídě \mathbb{C}** .

Věta 10.7

Množina K je úplná ve třídě všech rekurzivně spočetných množin.