IB107 Vyčíslitelnost a složitost

sublineární prostorové složitostní třídy*, TQBF

Jan Strejček

Fakulta informatiky
Masarykova univerzita

sublineární prostorové složitostní třídy

- chceme podchytit prostor využívaný nad rámec vstupu
- upravíme výpočetní model:
  - (vícepáskový) Turingův stroj se speciální vstupní páskou
  - vstupní páska je konečná, za vstupem je koncová značka $\lhd$
  - vstupní pásku lze pouze číst, nelze na ni zapsat
  - čtení ze vstupní pásky se nezapočítává do počtu přečtených políček $s_{\mathcal{M}}(w)$

- v tomto modelu je každý regulární jazyk v SPACE(1)

sublineární prostorové složitostní třídy

$$\mathsf{L} = \mathrm{LOGSPACE} = \mathrm{SPACE}(\log n)$$
$$\mathsf{NL} = \mathrm{NLOGSPACE} = \mathrm{NSPACE}(\log n)$$

Příklad: $\{0^k 1^k \mid k \geq 0\} \in L$

vztah NL a P

Věta

$NL \subseteq P$

Důkaz: Nechť $A \in$ NL a $\mathcal{N}_A$ je nedet. TM se speciální vstupní páskou rozhodující A s prostorovou složitostí $c \log n$. Konfigurace $\mathcal{N}_A$ je dána stavem, polohou hlavy na vstupní pásce, obsahem a polohou hlavy na pracovní pásce.
Celkem konfigurací: $|Q| \cdot |n+2| \cdot |\Gamma|^{c \log n} \cdot (c \log n + 1)$

Zkonstruujeme graf konfigurací $\mathcal{N}_A$ pro vstup w, kde hrany odpovídají kroku výpočtu $\mathcal{N}_A$. Zjistíme, zda je z iniciální konfigurace dosažitelná nějaká akceptující konfigurace. ■

vztahy prostorových a časových tříd

$$\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{NPSPACE} = \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME} \subseteq \mathrm{NEXPTIME}$$

$$\mathrm{NL} \subsetneq \mathrm{PSPACE} \qquad \mathrm{P} \subsetneq \mathrm{EXPTIME}$$

problém TQBF

QBF = kvantifikované výrokové formule (proměnné v doméně $\{0, 1\}$)

$$\exists x \forall y \big((x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)\big)$$

Předpokládáme, že QBF formule jsou v prenexní formě
(tedy kvantifikátory jsou pouze na začátku formule).

Definice (problém TQBF (true quantified Boolean formula))

Problém TQBF je problém rozhodnout, zda je daná QBF formule bez volných proměnných pravdivá.

$TQBF = \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ *je pravdivá QBF formule bez volných proměnných*$\}$

Věta 2.9

TQBF je PSPACE-úplný.

TQBF je PSPACE-úplný

Důkaz: *TQBF* $\in$ PSPACE: lze řešit rekurzivní procedurou $t(\varphi)$:

1. Je-li φ tvaru $\exists x(\varphi')$, spustíme $t(\varphi'[x \mapsto 0])$ a $t(\varphi'[x \mapsto 1])$. Pokud alespoň jedno z volání akceptuje, akceptujeme. Jinak zamítneme.
2. Je-li φ tvaru $\forall x(\varphi')$, spustíme $t(\varphi'[x \mapsto 0])$ a $t(\varphi'[x \mapsto 1])$. Pokud obě volání akceptují, akceptujeme. Jinak zamítneme.
3. Pokud φ neobsahuje kvantifikátory, snadno vyhodnotíme a akceptujeme, pokud je φ pravdivá. Jinak zamítneme.

Prostorová složitost:

- v jednom zavolání t si pamatujeme pouze něco konstantního
- hloubka rekurzivního volání:
- celkem:

TQBF je PSPACE-úplný

TQBF je PSPACE-těžký: ukážeme $A \in \text{PSPACE} \implies A \leq_p \textit{TQBF}$

Nechť $\mathcal{M}$ je TM s prostorovou složitostí n^k rozhodující A. Tedy $\mathcal{M}$ pracuje v čase $d^{(n^k)}$. Předpokládáme, že $\mathcal{M}$ má jednu akceptující konfiguraci c_{acc}. Důkaz kombinuje myšlenky důkazů NP-těžkosti *SAT*u a Savitchovy věty.

Pro každé slovo w sestrojíme QBF formuli Φ, která je pravdivá, právě když existuje výpočet stroje $\mathcal{M}$ z iniciální konfigurace pro w c_{start} do akceptující konfigurace c_{acc} s nejvýše $d^{(n^k)}$ kroky.

TQBF je PSPACE-úplný

Induktivně definujeme formuli $\Phi'_{c_1,c_2,t}$ říkající, že existuje výpočet stroje $\mathcal{M}$ z c_1 do c_2 s nejvýše t kroky:

$t = 1$: $\Phi'_{c_1,c_2,1}$ je pravdivá, právě když $c_1 = c_2$ nebo $c_1 \vdash_{\mathcal{M}} c_2$.

$t > 1$: $\Phi'_{c_1,c_2,t} \; = \; \exists m \, \forall (c_3, c_4) \in \{(c_1, m), (m, c_2)\} \left(\Phi'_{c_3,c_4,\lceil \frac{t}{2} \rceil} \right)$

Pak $\Phi = \exists c_1, c_2 \left(\Phi_{c_1 = c_{start}} \wedge \Phi_{c_2 = c_{acc}} \wedge \Phi'_{c_1,c_2,d^{(n^k)}} \right)$.

$|\Phi|$ je polynomiální vzhledem k $|w| = n$ a Φ je pravdivá $\iff w \in A$

Celkem $A \leq_p TQBF$ pro každé $A \in$ PSPACE. $\blacksquare$