

Jméno: Brouk Pytlík

UČO: 1234567

0007

líst

1

učo

1234567

body

Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

1. [3 body] Uvažme funkci  $f: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  definovanou následovně:

$$f(i, j, k) = \begin{cases} 1 + \sum_{n=i}^j \varphi_n(k) & \text{pokud } i \leq j \text{ a pro všechna } i \leq n \leq j \text{ platí } \varphi_n(k) \neq \perp \\ 0 & \text{pokud } i > j \\ \perp & \text{jinak} \end{cases}$$

- a) (2.5 bodu) Rozhodněte a dokažte, zda je funkce  $f$  vyčíslitelná.
- b) (0.5 bodu) Rozhodněte a dokažte, zda existuje totálně vyčíslitelná funkce  $h: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  taková, že pro všechna  $i, j, k \in \mathbb{N}$  platí

$$\varphi_{h(i,j)}(k) = f(i, j, k).$$

- a) Funkce  $f$  je vyčíslitelná, počítá ji například následující program.

```

begin
  if  $x_1 > x_2$  then  $x_1 := 0$  else begin
     $x_4 := 1$ ;
    while  $x_1 \leq x_2$  do begin
       $x_4 := x_4 + \Phi(x_1, x_3)$ ;
       $x_1 := x_1 + 1$ 
    end;
     $x_1 := x_4$ 
  end
end

```

Program pro argumenty  $i, j, k$  nejprve vyřeší případ  $i > j$ , pro který nastaví výstupní proměnnou  $x_1$  na 0. Pokud  $i \leq j$ , tak program v proměnné  $x_4$  přímočaře spočítá odpovídající hodnotu funkce  $f$  a následně ji zkopíruje do výstupní proměnné  $x_1$ . Pokud  $i \leq j$  a výpočet makra  $\Phi(x_1, x_3)$  pro nějaké  $i \leq x_1 \leq j$  a  $x_3 = k$  zacyklí, pak je funkce počítaná programem pro uvažované hodnoty nedefinovaná, což odpovídá definici funkce  $f$ .

- b) Ano, funkce  $h$  s požadovanými vlastnostmi existuje. Věta o parametrizaci říká, že existuje totálně vyčíslitelná funkce  $s_1^2: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  taková, že pro všechna  $e, i, j, k \in \mathbb{N}$  platí  $\varphi_{s_1^2(e,i,j)}(k) = \varphi_e^{(3)}(i, j, k)$ . Funkci  $h: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  získáme z funkce  $s_1^2$  zafixováním prvního argumentu na hodnotu libovolného indexu  $e$  funkce  $f$ . Takový index existuje, neboť je funkce  $f$  vyčíslitelná. Funkce  $h$  je tedy totálně vyčíslitelná a platí:

$$\varphi_{h(i,j)}(k) = \varphi_{s_1^2(e,i,j)}(k) = \varphi_e^{(3)}(i, j, k) = f(i, j, k).$$