

Jméno: Ferda Mravenec

UČO: 1234567

0007

list

|

učo

1234567

body

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

2. [3 body] Uvažme funkci  $g: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  definovanou následovně:

$$g(i, j) = \begin{cases} j & \text{je-li definováno alespoň } j \text{ z hodnot } \varphi_0(0), \varphi_1(1), \dots, \varphi_i(i) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- a) (2.5 bodu) Rozhodněte a dokažte, zda je funkce  $g$  vyčíslitelná.
- b) (0.5 bodu) Rozhodněte a dokažte, zda existuje totálně vyčíslitelná funkce  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  taková, že pro všechna  $i, j \in \mathbb{N}$  platí

$$\varphi_{h(i)}(j) = g(i, j).$$

- a) Funkce  $g(i, j)$  není vyčíslitelná, což dokážeme sporem. Předpokládejme, že  $g(i, j)$  je vyčíslitelná. Pak je vyčíslitelná i funkce

$$g'(i) = j, \text{ kde } j \text{ je počet definovaných hodnot z } \varphi_0(0), \varphi_1(1), \dots, \varphi_i(i),$$

neboť ji počítá následující program, který pro daný vstup  $x_1 = i$  vrací nejvyšší  $j$  splňující  $g(i, j) > 0$  a pokud takové  $j$  neexistuje, vrací 0.

```

begin
   $j := 1$ ;
  while  $g(x_1, j) > 0$  do  $j := j + 1$ ;
   $x_1 := j - 1$ 
end

```

Pak je ovšem vyčíslitelná i funkce

$$f(i) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } \varphi_i(i) \text{ je definováno,} \\ 0 & \text{jestliže } \varphi_i(i) \text{ není definováno,} \end{cases}$$

kterou počítá následující program.

```

begin
  if  $x_1 = 0$  then  $x_1 := g'(x_1)$  else  $x_1 := g'(x_1) - g'(x_1 - 1)$ 
end

```

O funkci  $f$  ovšem víme, že rozhoduje problém zastavení a není vyčíslitelná. Tím jsme dostali spor, přičemž jediným předpokladem bylo, že funkce  $g$  je vyčíslitelná.

- b) Sporem dokážeme, že funkce  $h(i)$  s požadovanými vlastnostmi neexistuje. Předpokládejme, že existuje totálně vyčíslitelná funkce  $h(i)$  splňující  $\varphi_{h(i)}(j) = g(i, j)$ . Pak je ovšem funkce  $g(i, j)$  vyčíslitelná, protože ji můžeme implementovat následujícím programem, kde  $\Phi$  je vyčíslitelná univerzální funkce pro standardní numeraci unárních vyčíslitelných funkcí.

```

begin
   $x_3 := h(x_1)$ ;
   $x_1 := \Phi(x_3, x_2)$ ;
end

```

O funkci  $g$  jsme ovšem dokázali, že není vyčíslitelná. Dostáváme tedy spor.