

Jméno: Chrobák Truhlík

UČO: 1234567

0007

líst

|

učo

1234567

body

Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

1. [3 body] Uvažme množinu $F \subseteq \mathbb{N}$ definovanou vztahem

$$F = \{i \mid \text{existuje } k > 1 \text{ takové, že pro všechna } x \in \mathbb{N} \text{ platí } \varphi_i(k \cdot x) = k\}.$$

- (a) Rozhodněte a dokažte, zda je množina F rekurzivně spočetná.
 (b) Rozhodněte a dokažte, zda je množina \overline{F} rekurzivně spočetná.

(a) Množina F není rekurzivně spočetná, což dokážeme pomocí 3. Riceovy věty.

F respektuje funkci: Uvažme libovolné $i, j \in \mathbb{N}$ splňující $i \in F$ a $\varphi_i = \varphi_j$. Jelikož $i \in F$, tak existuje $k > 1$ takové, že pro všechna $x \in \mathbb{N}$ platí $\varphi_i(k \cdot x) = k$. Z rovnosti $\varphi_i = \varphi_j$ pak plyne, že pro stejné $k > 1$ a všechna $x \in \mathbb{N}$ také platí $\varphi_j(k \cdot x) = k$, a proto $j \in F$.

Jako funkci θ zvolíme například konstantní funkci $\theta(x) = 2$. Tato funkce je zjevně vyčíslitelná.

$\{i \mid \varphi_i = \theta\} \subseteq F$: Pokud $\varphi_i = \theta$, pak pro všechna $x \in \mathbb{N}$ platí $\varphi_i(2x) = \theta(2x) = 2$. Pro $k = 2$ je tedy splněna podmínka v definici F , a proto $i \in F$.

$\{i \mid \varphi_i \leq \theta \text{ a } \text{dom}(\varphi_i) \text{ je konečná množina}\} \subseteq \overline{F}$: Uvažme libovolnou vyčíslitelnou funkci φ_i s konečným definičním oborem, která splňuje $\varphi_i \leq \theta$. Sporem dokážeme, že $i \in \overline{F}$. Předpokládejme, že $i \in F$. Pak ovšem existuje $k > 1$ takové, že $\varphi_i(k \cdot x) = k$ pro všechna $x \in \mathbb{N}$. Zejména tedy platí, že φ_i je definovaná pro všechny násobky k a množina $\text{dom}(\varphi_i)$ je tudíž nekonečná. To je spor, a proto $i \in \overline{F}$.

Z 3. Riceovy věty plyne, že množina F není rekurzivně spočetná.

(b) Množina \overline{F} také není rekurzivně spočetná, což dokážeme pomocí 2. Riceovy věty. Necht' $\theta(x) = \perp$ je funkce s prázdným definičním oborem a $\theta'(x) = 2$. Obě funkce jsou zjevně vyčíslitelné a $\theta \leq \theta'$.

\overline{F} respektuje funkci: Víme, že libovolná množina respektuje funkce právě tehdy, když respektuje funkce její doplněk. Dokázali jsme, že F respektuje funkce, a proto také \overline{F} respektuje funkce.

$\{i \mid \varphi_i = \theta\} \subseteq \overline{F}$: Jelikož θ není definovaná pro žádný argument, nemůže existovat ani jedno k a x takové, že $\theta(k \cdot x) = k$ a proto všechny indexy θ leží v \overline{F} .

$\{i \mid \varphi_i = \theta'\} \subseteq \overline{\overline{F}} = F$: Skutečnost, že indexy konstantní funkce 2 leží v F , byla dokázána v bodě (a), kde byla tato funkce nazvaná θ .

Z 2. Riceovy věty plyne, že množina \overline{F} není rekurzivně spočetná.