Jméno: Ferdo Mravec **UČO:** 1234567

0007 *list* 1 *učo* 1234567 *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

---

2. [3 body] Uvažme množinovou operaci $\maltese$, která pro libovolné množiny $A, B \subseteq \mathbb{N}$ vrací množinu

$$A \maltese B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}.$$

Dokažte nebo vyvraťte následující implikace.

(a) A je rekurzivní $\Longrightarrow A \maltese A$ je rekurzivní

(b) A je rekurzivně spočetná $\Longrightarrow A \maltese A$ je rekurzivně spočetná

Bonus [2 body]: Za důkaz či vyvrácení každé z následujících implikací můžete získat další bod.

(c) A je rekurzivní $\Longleftarrow A \maltese A$ je rekurzivní

(d) A je rekurzivně spočetná $\Longleftarrow A \maltese A$ je rekurzivně spočetná

(a) Implikace platí. Pro dané $z \in \mathbb{N}$ rozhodujeme $z \overset{?}{\in} A \maltese A$ intuitivně tak, že z postupně rozložíme na všechny dvojice x, y splňující $z = x + y$ a pokud pro nějakou takovou dvojici platí $x, y \in A$, pak $z \in A \maltese A$. V opačném případě $z \notin A \maltese A$.

Předpokládejme tedy, že A je rekurzivní a její charakteristická funkce χ_A je tudíž totálně vyčíslitelná. Pak je i množina $A \maltese A$ rekurzivní, protože její charakteristickou funkci $\chi_{A \maltese A}$ lze počítat následujícím programem.

```
begin
   x := 0;
   y := x1 − x;
   r := 0;
   while x ≤ x1 do begin
         if (χA(x) = 1 ∧ χA(y) = 1) then r := 1;
         x := x + 1;
         y := x1 − x
   end;
   x1 := r
end
```

(b) Implikace platí. Využijeme fakt, že množina je r.e., právě když je oborem hodnot nějaké vyčíslitelné funkce. Nechť A je r.e. a $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je vyčíslitelná funkce splňující $range(f) = A$. Pak $A \maltese A$ je taktéž r.e., neboť je oborem hodnot vyčíslitelné funkce g počítané tímto programem:

```
begin
   x := f(π1(x1));
   y := f(π2(x1));
   x1 := x + y
end
```

Zjevně platí $range(A) \subseteq A \maltese A$, jelikož všechny výstupy programu jsou tvaru $x + y$, kde $x, y \in range(f) = A$. Zbývá dokázat $range(A) \supseteq A \maltese A$. Uvažme libovolný prvek $z \in A \maltese A$. Pak $z = x + y$ pro vhodné $x, y \in A = range(f)$. Tedy $z = f(a) + f(b)$ pro vhodné $a, b \in \mathbb{N}$. S využitím párující funkce τ snadno získáme $\tau(a, b)$, pro které platí $g(\tau(a, b)) = f(\pi_1(\tau(a, b))) + f(\pi_2(\tau(a, b))) = f(a) + f(b) = z$, a proto $z \in range(g)$. Celkem dostáváme $range(g) = A \maltese A$.

Jméno: Ferdo Mravec **UČO:** 1234567

(c) Implikace neplatí. Protipříklad snadno zkonstruujeme s využitím operace $\oplus$ definované pro libovolné $A, B \subseteq \mathbb{N}$ na cvičeních v příkladu 4.2:

$$A \oplus B = \{2a \mid a \in A\} \cup \{2b + 1 \mid b \in B\}.$$

Na cvičeních jsme dokázali, že $A \oplus B$ je rekurzivní právě tehdy, když A i B jsou rekurzivní. Jelikož K není rekurzivní, tak ani množina $\mathbb{N} \oplus K$ není rekurzivní. Dále víme, že přidání konečně mnoha prvků do množiny nemá vliv její (ne)rekurzivitu. Proto ani množina $A = (\mathbb{N} \oplus K) \cup \{1\}$ není rekurzivní. Tato množina přitom obsahuje všechna sudá čísla včetně 0 a také číslo 1. Tedy $A \maltese A = \mathbb{N}$, což je rekurzivní množina.

(d) Ani tato implikace neplatí. Na cvičeních jsme totiž také dokázali, že $A \oplus B$ je r.e. právě tehdy, když A i B jsou r.e. Jelikož $\overline{K}$ není r.e., tak ani množina $\mathbb{N} \oplus \overline{K}$ není r.e. Dále víme, že přidání konečně mnoha prvků do množiny nemá vliv na to, zda množina je či není rekurzivně spočetná. Proto ani množina $A = (\mathbb{N} \oplus \overline{K}) \cup \{1\}$ není r.e. Tato množina přitom obsahuje všechna sudá čísla včetně 0 a také číslo 1. Tedy $A \maltese A = \mathbb{N}$, což je r.e. množina. Dodejme, že zde zkonstruovaná množina A by šla použít jako protipříklad i pro předchozí implikaci.