

Jméno: Nesmlouvavý Pstruh

UČO: 1234567

0007

líst

|

učo

1234567

body

Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

1. [3 body] Řekneme, že výroková formule φ v konjunktivní normální formě (CNF) je *napůl splnitelná*, právě když existuje valuace splňující přesně $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ klauzulí formule φ , kde n je počet klauzulí této formule.

Uvažme problém rozhodnout, zda je daná výroková formule v CNF napůl splnitelná, tedy problém

$$HALFSAT = \{ \langle \varphi \rangle \mid \varphi \text{ je formule v CNF, která je napůl splnitelná} \}.$$

Dokažte, že *HALFSAT* je NP-úplný.

Příslušnost do NP. Problém *HALFSAT* je rozhodován např. nedeterministickým Turingovým strojem, který pracuje následovně: stroj nejprve deterministicky ověří, zda vstup je kódem nějaké výrokové formule φ v CNF (to lze jistě učinit v polynomiálním čase). Pokud tomu tak není, ihned zamítne. V opačném případě nedeterministicky vybere nějakou valuaci proměnných z φ a vyhodnotí, zda tato valuace splňuje právě $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ klauzulí, kde n je počet klauzulí ve formuli φ . Pokud ano, stroj akceptuje, jinak zamítá. Všechny uvedené operace lze na Turingově stroji implementovat v polynomiálním čase, tedy uvedený stroj má polynomiální časovou složitost. Je zjevné, že tento Turingův stroj akceptuje právě *HALFSAT*.

NP-těžkost. Ukážeme, že $3SAT \leq_p HALFSAT$, kde $3SAT$ je známý NP-těžký problém. Uvažme funkci f definovanou vztahem

$$f(x) = \begin{cases} \langle \neg(y \wedge z) \rangle & \text{pokud } x \text{ není kódem formule v 3CNF,} \\ \langle \varphi' \rangle & \text{pokud } x = \langle \varphi \rangle \text{ a } \varphi \text{ je formule v 3CNF s klauzulemi } c_1, c_2, \dots, c_n, \end{cases}$$

kde $\varphi' = c'_1 \wedge c'_2 \wedge \dots \wedge c'_n \wedge z_1 \wedge z_2 \wedge \dots \wedge z_n$ je formule s $2n$ klauzulemi, každá klauzule c'_i je tvaru $c'_i = c_i \vee z_1 \vee z_2 \vee \dots \vee z_n$ a z_1, z_2, \dots, z_n jsou čerstvé výrokové proměnné. Funkce f je totálně vyčíslitelná deterministickým strojem s polynomiální časovou složitostí, který funguje následovně. Stroj nejprve zkontroluje, zda vstup je kódem formule v 3CNF. Pokud není, zapíše na pásku $\langle \neg(y \wedge z) \rangle$. Pokud je, přidá do každé její klauzule literály z_1, \dots, z_n a dále k formuli přidá dalších n klauzulí $z_1 \wedge \dots \wedge z_n$ a na výstup dá výslednou zakódovanou formuli.

Zbývá ukázat, že $x \in 3SAT \iff f(x) \in HALFSAT$. Tato ekvivalence zřejmě platí pro x , která nejsou kódy výrokových formulí v 3CNF, protože pak $x \notin 3SAT$ a $f(x) = \langle \neg(y \wedge z) \rangle \notin HALFSAT$, neboť $\neg(y \wedge z)$ není formule v CNF. Ve zbytku důkazu tedy předpokládejme, že $x = \langle \varphi \rangle$, kde φ je výroková formule v 3CNF s klauzulemi c_1, c_2, \dots, c_n .

“ \implies ” Necht $\langle \varphi \rangle \in 3SAT$, tedy existuje valuace ν splňující φ . Jinými slovy, všechny klauzule c_1, \dots, c_n jsou pravdivé ve valuaci ν . Nyní uvažme valuaci ν' , která se na proměnných z φ chová stejně jako ν a proměnné z_1, \dots, z_n zobrazí na *false*. Ve valuaci ν' jsou pravdivé klauzule c'_1, \dots, c'_n a naopak nejsou pravdivé klauzule z_1, \dots, z_n . Celkem je tedy valuací ν' splněno právě $n = \lceil \frac{2n}{2} \rceil$ z $2n$ klauzulí formule φ' a proto $f(\langle \varphi \rangle) = \langle \varphi' \rangle \in HALFSAT$.

“ \impliedby ” Necht $f(\langle \varphi \rangle) = \langle \varphi' \rangle \in HALFSAT$, tedy existuje valuace ν splňující právě n klauzulí z φ' . Tato valuace musí zobrazovat všechny proměnné z_1, \dots, z_n na *false*, protože každý literál z_i je v $n+1$ klauzulích a tudíž zobrazení, které by nějaké z_i zobrazilo na *true*, by splnilo více než n klauzulí. Zobrazení ν tedy nesplňuje klauzule z_1, \dots, z_n a tudíž musí splnit klauzule c'_1, \dots, c'_n . Jelikož každá klauzule c'_i má tvar $c_i \vee z_1 \vee z_2 \vee \dots \vee z_n$, musí ν splnit i všechny klauzule c_i z φ a tato formule v 3CNF je tedy splnitelná. Proto $\langle \varphi \rangle \in 3SAT$.