Jméno: Nadšený Poník **UČO:** 1234567

0007 *list* 1 *učo* 1234567 *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

2. [3 body] Uvažujme konečné orientované grafy, jejichž hrany jsou ohodnocené nezápornými celými čísly. Problém *jednoduché cesty dané délky* je problém rozhodnout, zda v takovém grafu existuje jednoduchá cesta (tj. cesta, která každý vrchol navštíví nejvýše jednou) z daného vrcholu s do daného vrcholu t, jejíž délka (myšleno součet ohodnocení hran na cestě) je právě daná hodnota k. Tento problém ztotožníme s množinou

$$JCDD = \{\langle G, s, t, k\rangle \mid G \text{ je graf, ve kterém existuje jednoduchá cesta z } s \text{ do } t \text{ délky } k\}.$$

Dokažte, že $JCDD$ je NP-úplný.

Příslušnost do NP. Problém $JCDD$ je rozhodován nedeterministickým Turingovým strojem, který pracuje následovně. Stroj nejprve deterministicky ověří, zda vstup je kódem nějaké čtveřice G, s, t, k, kde G je orientovaný graf, s, t jsou jeho vrcholy, a k je nezáporné číslo menší nebo rovno součtu ohodnocení všech hran v G. Pokud tomu tak není, ihned zamítne. V opačném případě nedeterministicky vybere sekvenci nejvýše $n - 1$ hran, kde n je počet vrcholů G, a ověří, že tyto vrcholy tvoří jednoduchou cestu z s do t délky k. Pokud ano, stroj akceptuje, jinak zamítá. Všechny uvedené kroky lze na Turingově stroji implementovat v polynomiálním čase, tedy uvedený stroj má polynomiální časovou složitost. Je zjevné, že tento Turingův stroj akceptuje právě $JCDD$.

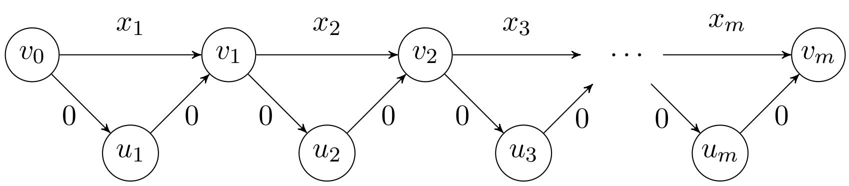
NP-těžkost. Ukážeme, že $SUBSET\text{-}SUM \leq_p JCDD$, kde $SUBSET\text{-}SUM$ je NP-úplný problém rozhodnout, zda pro danou konečnou multimnožinu S obsahující přirozená čísla existuje multimnožina $Y \subseteq S$, jejíž součet je dané přirozené číslo o.

$$SUBSET\text{-}SUM = \{\langle S, o\rangle \mid S = \{x_1, \dots, x_m\} \text{ a pro nějaké } \{y_1, \dots, y_n\} \subseteq S \text{ platí } \Sigma_{i=1}^{n} y_i = o\}.$$

Uvažme funkci f definovanou vztahem

$$f(x) = \begin{cases} \langle \textcircled{s} \xrightarrow{2} \textcircled{t}, s, t, 1\rangle & \text{pokud } x \text{ není očekávaného tvaru } \langle S, o\rangle, \\ \langle G, v_0, v_m, o\rangle & \text{pokud } x = \langle S, o\rangle \text{ a } S = \{x_1, \dots, x_m\}, \end{cases}$$

kde G je následující graf:



Funkce f je zjevně totálně vyčíslitelná deterministickým strojem s polynomiální časovou složitostí.

Zbývá ukázat, že $x \in SUBSET\text{-}SUM \iff f(x) \in JCDD$.

"$\Longrightarrow$" Pokud $x \in SUBSET\text{-}SUM$, pak $x = \langle S, o\rangle$, kde $S = \{x_1, \dots, x_m\}$ a existuje $Y = \{y_1, \dots, y_n\} \subseteq S$ splňující $\Sigma_{i=1}^{n} y_i = o$. V generovaném grafu G uvažme cestu z v_0 do v_m takovou, že pro každé $1 \leq i \leq m$ využijeme hranu $v_{i-1} \xrightarrow{x_i} v_i$ pokud $x_i \in Y$ a hrany $v_{i-1} \xrightarrow{0} u_i \xrightarrow{0} v_i$ jinak. Tím dostáváme jednoduchou cestu z v_0 do v_m délky o. Tedy $f(x) = \langle G, v_0, v_m, o\rangle \in JCDD$.

"$\Longleftarrow$" Nechť $f(x) \in JCDD$. Z definice f je jasné, že $x = \langle S, o\rangle$ a $f(x) = \langle G, v_0, v_m, o\rangle$. Uvažme jednoduchou cestu v grafu G z v_0 do v_m délky o. Multimnožinu Y zkonstruujeme tak, aby obsahovala právě všechna $x_i > 0$ taková, že hrana $v_{i-1} \xrightarrow{x_i} v_i$ leží na této cestě. Z konstrukce plyne, že $Y \subseteq S$ a součet všech prvků v Y je právě o. Tedy $x = \langle S, o\rangle \in SUBSET\text{-}SUM$.

Oblast strojově snímaných informací, nezasahujte.