

Jméno: Ferda Mravenec

UČO: 1234567

0007

líst

1

učo

1234567

body

Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Uvažme funkci $f: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ definovanou následovně:

$$f(i, j, k) = \begin{cases} \max(\varphi_i(k), \varphi_j(k)) & \text{pokud } \varphi_i(k) \neq \perp \neq \varphi_j(k), \\ \perp & \text{jinak.} \end{cases}$$

- a) (1,5 bodu) Rozhodněte a dokažte, zda je funkce f vyčíslitelná.
- b) (1 bod) Rozhodněte a dokažte, zda existuje totálně vyčíslitelná funkce $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $i, j, k \in \mathbb{N}$ platí

$$\varphi_{h(i)}(j, k) = f(i, j, k).$$

- a) Funkce f je vyčíslitelná, neboť je počítaná následujícím programem (kde Φ je univerzální funkce pro vyčíslitelné funkce arity 1):

```

begin
   $y := \Phi(x_1, x_3);$ 
   $z := \Phi(x_2, x_3);$ 
  if  $y < z$  then  $x_1 := z$  else  $x_1 := y$ 
end

```

Vskutku, program zastaví na vstupu i, j, k právě když zastaví výpočty hodnot $\Phi(i, k) = \varphi_i(k)$ a $\Phi(j, k) = \varphi_j(k)$, tedy právě když jsou obě hodnoty definovány. V takovém případě pak díky předposlednímu řádku vrátí maximum z těchto hodnot.

- b) Dle věty o parametrizaci existuje totálně vyčíslitelná funkce $s_2^1: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $e, i, j, k \in \mathbb{N}$ je $\varphi_{s_2^1(e,i)}^{(2)}(j, k) = \varphi_e^{(3)}(i, j, k)$. Z odrážky a) víme, že f je vyčíslitelná ternární funkce, existuje tedy index $E \in \mathbb{N}$ takový, že $f = \varphi_E^{(3)}$. Definujme nyní unární funkci h tak, že pro libovolné $i \in \mathbb{N}$ položíme $h(i) = s_2^1(E, i)$ (pozn. autora: lze též psát $h = s_2^1(E, \cdot)$). Funkce h je vyčíslitelná, neboť ji počítá následující program:

```

begin
   $x_1 := s_2^1(E, x_1)$ 
end

```

(přičemž s_2^1 je vyčíslitelná, viz výše). Protože s_2^1 je totální, tento program vždy zastaví a tedy i h je totální. Konečně pro všechna $i, j, k \in \mathbb{N}$ platí

$$\varphi_{h(i)}(j, k) = \varphi_{s_2^1(E,i)}(j, k) = \varphi_E^{(3)}(i, j, k) = f(i, j, k),$$

kde první rovnost plyne z definice funkce h , druhá rovnost je vlastností funkce s_2^1 a poslední rovnost plyne z definice konstanty E .