Jméno: Broule Pytlík **UČO:** 1234567

Uvažme funkci $g\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ definovanou následovně:

$$g(i,j,k) = \begin{cases} \max(\varphi_i(k), \varphi_j(k)) & \text{pokud } \varphi_i(k) \neq \perp \neq \varphi_j(k), \\ \varphi_i(k) & \text{pokud } \varphi_i(k) \neq \perp \text{ a } \varphi_j(k) = \perp, \\ \varphi_j(k) & \text{pokud } \varphi_i(k) = \perp \text{ a } \varphi_j(k) \neq \perp, \\ \perp & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) (1,5 bodu) Rozhodněte a dokažte, zda je funkce g vyčíslitelná.

b) (1 bod) Rozhodněte a dokažte, zda existuje totálně vyčíslitelná funkce $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $i, j, k \in \mathbb{N}$ platí

$$\varphi_{h(i)}(j,k) = g(i,j,k).$$

---

a) Funkce g není vyčíslitelná. Dokážeme sporem: budeme předpokládat, že tato funkce je vyčíslitelná a ukážeme, že pak je nutně vyčíslitelná i funkce χ_K, tj. charakteristická funkce množiny K (připomenutí: $\chi_K(x) = 1$ pokud $\varphi_x(x)$ je definováno a v opačném případě $\chi_K(x) = 0$). Z přednášky ovšem víme, že χ_K není vyčíslitelná (odpovídá „diagonálnímu Halting problému"), což je onen hledaný spor.

Předpokládejme tedy, že g je vyčíslitelná. Nechť J je index funkce, která pro libovolný vstup vrátí 0 (tato funkce je zřejmě vyčíslitelná, neboť je počítaná jednořádkovým programem, který do x_1 přiřadí 0). Dále uvažme unární funkci r takovou, že

$$r(n) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \varphi_n(n) \text{ je definováno} \\ \perp & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tato funkce je vyčíslitelná, neboť je počítaná následujícím programem (kde Φ je univerzální funkce pro aritu 1):

<u>**begin**</u>
  $y := \Phi(x_1, x_1);$
  $x_1 := 1$
<u>**end**</u>

Funkce r má tedy rovněž index, označme jej I. Nyní uvažme unární funkci $g(I, J, \cdot)$. Ta je vyčíslitelná, neboť je počítaná programem <u>**begin**</u> $x_1 := g(I, J, x_1)$ <u>**end**</u>. Ukážeme, že $g(I, J, \cdot) = \chi_K$, tj. pro všechna $x \in \mathbb{N}$ je $\chi_K(x) = g(I, J, x)$. Tím ukážeme, že χ_K je vyčíslitelná a dostaneme hledaný spor. Tvrzení ukážeme rozborem případů.

- Pokud x je t.ž. $\varphi_x(x)$ je definováno (tj. $\chi_K(x) = 1$), pak $\varphi_I(x) = r(x) = 1$ a $\varphi_J(x) = 0$. Ovšem pak $g(I, J, x) = \max(1, 0) = 1$.
- Pokud x je t.ž. $\varphi_x(x)$ není definováno (tj. $\chi_K(x) = 0$), pak ani $\varphi_I(x) = r(x)$ není definováno a tedy $g(I, J, x) = \varphi_J(x) = 0$.

Jméno: Brouk Pytlík **UČO:** 1234567

0007 *list* 2 *učo* 1234567 *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

b) Taková funkce h neexistuje. Kdyby existovala, pak by i funkce g byla vyčíslitelná, neboť by byla počitatelná následujícím programem:

begin
$\quad temp := h(x_1);$
$\quad x_1 := \Phi(temp, x_2, x_3)$
end