

Jméno: Adalbert Kolínský

UČO: 1234567

0007

líst

|

učo

1234567

body

Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte  
 zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

1. [2,5 bodu] V následujícím zadání označme  $2\mathbb{N}$  množinu všech sudých přirozených čísel (včetně 0).  
 Uvažme množinu

$$A = \{i \mid 2\mathbb{N} \subseteq \text{range}(\varphi_i)\}.$$

1. Rozhodněte a dokažte, zda je množina  $A$  rekurzivní.
2. Rozhodněte a dokažte, zda je množina  $A$  rekurzivně spočetná.

Ukážeme, že  $A$  není rekurzivně spočetná. Tím pádem nemůže být ani rekurzivní, tedy odpověď na obě otázky je NE.

Použijeme 3. Riceovu větu. Nejprve ověříme, že  $A$  respektuje funkce. Necht'  $i, j \in \mathbb{N}$  jsou indexy takové, že  $\varphi_i = \varphi_j$  a  $i \in A$ . Pak  $2\mathbb{N} \subseteq \text{range}(\varphi_i) = \text{range}(\varphi_j)$ , tedy rovněž  $j \in A$ . Množina  $A$  tedy vskutku respektuje funkce.

Nyní uvažme funkci  $\theta$ , která je identitou na přirozených číslech, tj.  $\theta(x) = x$  pro všechna  $x \in \mathbb{N}$ . Zřejmě  $\theta$  je vyčíslitelná (počítá ji např. program **begin**  $x_1 := x_1$  **end**) a navíc

$$\text{range}(\theta) = \mathbb{N} \supseteq 2\mathbb{N}.$$

Tedy  $\{i \mid \varphi_i = \theta\} \subseteq A$ . Necht' nyní  $f$  je libovolné konečné zúžení funkce  $\theta$ , tj.  $f \leq \theta$  a  $\text{dom}(f)$  je konečná množina. Protože  $\text{dom}(f)$  je konečná množina, je i  $\text{range}(f)$  konečná množina.<sup>1</sup> Zejména tedy  $2\mathbb{N}$ , která je nekonečná, nemůže být podmnožinou  $\text{range}(f)$ . Proto

$$\{i \mid \varphi_i \leq \theta \text{ a } \text{dom}(\varphi_i) \text{ je konečná množina}\} \subseteq \overline{A}.$$

Z 3. Riceovy věty plyne, že  $A$  není rekurzivně spočetná.

<sup>1</sup>Pozn. autora: obecně vztah  $|\text{range}(f)| \leq |\text{dom}(f)|$  platí pro libovolnou funkci typu  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , a za využití axiomu výběru platí pro funkce nad libovolnými množinami.