Jméno: Eliška Kutnohorská **UČO:** 1234567

2. [2,5 bodu] Pro libovolné množiny $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ definujme množinu

$$X \bullet Y = \{i \mid dom(\varphi_i) \cap X \neq \emptyset \text{ a } dom(\varphi_i) \cap Y \neq \emptyset\}.$$

Tj. $X \bullet Y$ obsahuje právě indexy těch funkcí, které jsou definovány alespoň na jednom prvku množiny X a alespoň na jednom prvku množiny Y. Rozhodněte a dokažte, zda platí následující tvrzení:

1. Pokud X a Y jsou rekurzivní, pak i $X \bullet Y$ je rekurzivní.
2. Pokud X a Y jsou rekurzivně spočetné, pak i $X \bullet Y$ je rekurzivně spočetná.

Tvrzení (1.) neplatí. Jako protipříklad uvažme situaci kdy $X = Y = \mathbb{N}$. Zřejmě pak X i Y je rekurzivní. Navíc

$$X \bullet Y = \{i \mid dom(\varphi_i) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset\} = \{i \mid dom(\varphi_i) \neq \emptyset\}.$$

(Druhá rovnost plyne z toho, že z definice vyčíslitelné funkce je $dom(\varphi_i) \subseteq \mathbb{N}$.)

Stačí nyní ukázat, že množina $A = \{i \mid dom(\varphi_i) \neq \emptyset\} = X \bullet Y$ není rekurzivní. Ukážeme to pomocí 1. Riceovy věty. Potřebujeme ověřit, že A splňuje její předpoklady:

- $A \neq \emptyset$, neboť A obsahuje index identity na přirozených číslech (což je zřejmě vyčíslitelná funkce).
- $A \neq \mathbb{N}$, neboť A neobsahuje index prázdné funkce (prázdná funkce je vyčíslitelná, neboť je počítaná programem, který se schválně zacyklí na každém vstupu.)
- A respektuje funkce: Pokud $\varphi_i = \varphi_j$ a $i \in A$, pak $dom(\varphi_j) = dom(\varphi_i) \neq \emptyset$, tedy rovněž $j \in A$.

Dle 1. Riceovy věty tedy A není rekurzivní.

Tvrzení 2 platí. Nechť X, Y jsou libovolné rekurzivně spočetné množiny. Existují tedy indexy a, b takové, že $X = dom(\varphi_a)$ a $Y = dom(\varphi_b)$. Ukážeme, že existuje index c takový, že $X \bullet Y = dom(\varphi_c)$.

Uvažme následující program P, který využívá projekce π_1 a π_2 a funkci *step counter* (Sc) z přednášky (odtamtud též víme, že všechny tyto funkce jsou totálně vyčíslitelné):

begin
  $i := 0;$
  while $Sc(a, \pi_1(i), \pi_2(i)) \neq 1 \lor Sc(x_1, \pi_1(i), \pi_2(i)) \neq 1$ **do**
    begin $i := i + 1$ **end**
  $i := 0;$
  while $Sc(b, \pi_1(i), \pi_2(i)) \neq 1 \lor Sc(x_1, \pi_1(i), \pi_2(i)) \neq 1$ **do**
    begin $i := i + 1$ **end**
end

(Hodnoty a a b jsou konstanty inicializované výše.) Dokážeme, že P zastaví právě pro vstupy z $X \bullet Y$.

Předpokládejme, že programu P dáme na vstup nějaký prvek e množiny $X \bullet Y$ (tj. inicializujeme x_1 na e a ostatní proměnné na 0). Z definice množiny $X \bullet Y$ existují $x \in X$ a $y \in Y$ taková, že

$x, y \in dom(\varphi_e)$. Protože $x \in X$, pak program P_a zastaví na vstupu x, tj. existuje počet kroků s takový, že $Sc(a, x, s) = 1$. Protože $x \in dom(\varphi_e)$, pak program P_e zastaví na vstupu x, tj. existuje počet kroků s' takový, že $Sc(e, x, s') = 1$. Položme, $t = \max\{s, s'\}$. Pak pro $i = \tau(x, t)$ (zde τ je párující funkce z přednášky) platí $Sc(a, \pi_1(i), \pi_2(i)) = 1 \ \wedge \ Sc(e, \pi_1(i), \pi_2(i)) = 1$. Protože e je uloženo v proměnné x_1, dostáváme, že první while-cyklus skončí po nejvýše $\tau(x, t)$ iteracích. Symetricky se dá argumentovat (s využitím $y \in Y$ a $y \in dom(\varphi_e)$), že skončí i druhý while-cyklus a tedy i celý program.

Nyní předpokládejme, že programu P dáme na vstup číslo $e \notin X \bullet Y$. Pak buď $X \cap dom(\varphi_e) = \emptyset$ nebo $Y \cap dom(\varphi_e) = \emptyset$. Předpokládejme, že nastala první možnost, důkaz pro druhou možnost je symetrický. Ukážeme, že první while-cyklus nikdy neskončí. Aby nějaké konkrétní i porušilo podmínku cyklu, musí být zejména $Sc(a, \pi_1(i), \pi_2(i)) = 1$ a tedy musí být $\pi_1(i) \in dom(\varphi_a) = X$. Pak ale z našeho předpokladu plyne $\pi_1(i) \notin dom(\varphi_e)$ a tedy $Sc(e, \pi_1(i), \ell) \neq 1$ pro každé ℓ, zejména pro $\ell = \pi_2(i)$. Tedy podmínka cyklu vždy platí a cyklus neskončí.

Ukázali jsme, že P (brán jako program přijímající jeden vstup) zastaví právě tehdy, když na vstup dostane prvek $X \bullet Y$. Pokud tedy c je index programu P, pak $X \bullet Y = dom(\varphi_c)$, tedy $X \bullet Y$ je rekurzivně spočetná.