

Jméno: Chuck Norris

UČO: 1234567

0007

líst

1

učo

1234567

body

Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

3. [2 body] Bonusový úkol, bude opraven jen tehdy, pokud z ostatních dvou příkladů získáte alespoň 4 body.

Připomeňme definici iterovaného skládání funkcí: pro libovolnou funkci $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a libovolné $x \in \mathbb{N}$ klademe $f^0(x) = x$; pro $k > 0$ klademe $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$ (pokud $f^{k-1}(x) = \perp$, pak i $f^k(x) = \perp$). Pozor, nepleťte toto značení se značením arity z přednášky ($\varphi_i^{(m)}$ jakožto sémantická funkce programu P_i arity m).

Uvažme množinu

$$B = \{i \mid \exists k \geq 1. \varphi_{\pi_1(i)}^k(\pi_2(i)) = 0\}.$$

(Zde π_1 a π_2 jsou projekce párovací funkce, viz 2. přednáška). Rozhodněte a dokažte, zda je množina B rekurzivní.

Množina není rekurzivní, což dokážeme pomocí redukce. Ukážeme, že platí $K \leq_m B$.

Chceme tedy ukázat, že existuje TVF f taková, že $x \in K \iff f(x) \in B$.

Nechť máme nejprve funkci $g(i)$, která pro konkrétní i vrátí index následujícího programu:

```
begin
  y :=  $\Phi(i, i)$ ;
  x1 := 0;
end
```

Pro funkci s indexem $g(i)$ pak tedy platí:

$$\varphi_{g(i)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } \varphi_i(i) \text{ je def - tedy } i \in K \\ \perp & \text{jinak.} \end{cases}$$

Funkce $g(i)$ jen dosazuje konkrétní číslo do kostry programu a vrací jeho index, tedy je TVF.

U funkce $\varphi_{g(i)}(a)$ nezáleží její chování na vstupu a , pracujme tedy např. s nulou.

Naše redukční funkce f , se pak bude chovat takto: $f(x) = \langle g(x), 0 \rangle$.

(pak tedy $\pi_1(f(x)) = g(x)$, $\pi_2(f(x)) = 0$)

Jelikož párující funkce i funkce g jsou TVF, je i f TVF.

Nyní dokažme ekvivalenci $x \in K \iff f(x) \in B$:

$$x \in K \implies \varphi_x(x) \text{ je def} \implies \varphi_{g(x)}(0) = 0 \implies \text{pro } k=1 \text{ platí } \varphi_{g(x)}^1(0) = 0 \implies \langle g(x), 0 \rangle \in B$$

$$x \notin K \implies \varphi_x(x) = \perp \implies \varphi_{g(x)}(0) = \perp \implies \forall k \geq 1 \text{ platí } \varphi_{g(x)}^k(0) = \perp \implies \langle g(x), 0 \rangle \notin B$$

Tedy jsme ukázali, že platí $K \leq_m B$. A jelikož K není rekurzivní, tak ani B nemůže být rekurzivní.