Jméno: Chuck Norris **UČO:** 1234567

0007 *list* 1 *učo* 1234567 *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. [2 body] Bonusový úkol, bude opraven jen tehdy, pokud z ostatních dvou příkladů získáte alespoň 4 body.

Připomeňme definici iterovaného skládání funkcí: pro libovolnou funkci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a libovolné $x \in \mathbb{N}$ klademe $f^0(x) = x$; pro $k > 0$ klademe $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$ (pokud $f^{k-1}(x) = \bot$, pak i $f^k(x) = \bot$). Pozor, nepleťte toto značení se značením arity z přednášky ($\varphi_i^{(m)}$ jakožto sémantická funkce programu P_i arity m).

Uvažme množinu

$$B = \{i \mid \exists k \geq 1. \varphi^k_{\pi_1(i)}(\pi_2(i)) = 0\}.$$

(Zde π_1 a π_2 jsou projekce párovací funkce, viz 2. přednáška). Rozhodněte a dokažte, zda je množina B rekurzivní.

B nie je rekurzívna.

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme redukciou $K \leq_m B$, kde $K = \{i \mid \varphi_i(i) \text{ je definované}\}$. Nech y je index programu:

```
begin
    Φ(x₁, x₁);
    x₁ := 0;
end
```

Program počítajúci funkciu f definujeme nasledovne:

```
begin
    x₁ := τ(y, x₁);
end
```

f teda vráti spárovanu dvojicu y (index vyššie uvedeného programu) a x_1. Táto funkcia je zrejme totálne vyčísliteľná, nakoľko vieme vytvoriť index y a párujúca funkcia τ je TV.
Dokážeme $x \in K \iff f(x) \in B$.

$x \in K \Rightarrow f(x) \in B$:
$x \in K \Rightarrow f(x) = \tau(y, x)$. Máme $\varphi_x(x)$ je def., teda $\varphi^1_y(x) = 0$, takže $\tau(y, x) \in B \Rightarrow f(x) \in B$.

$x \notin K \Rightarrow f(x) \notin B$:
$x \notin K \Rightarrow f(x) = \tau(y, x)$. Vieme, že $\varphi_x(x)$ nie je def., teda ani $\varphi^1_y(x)$ nie je def., tým pádom $(\forall k \geq 1)(\varphi^k_y(x) = \bot)$, takže $\tau(y, x) \notin B \Rightarrow f(x) \notin B$.

Ukázali sme, že $K \leq_m B$ a keďže K nie je rekurzívna, tak ani B nie je rekurzívna. □