Jméno: Nemotorný Ptakopysk **UČO:** 1234567

0007 *list* 1 *učo* 1234567 *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

1. [2,5 bodu] Nechť φ je výroková formule v 3cnf. Řekneme, že φ je *téměř splnitelná*, pokud existuje taková valuace proměnných, ve které jsou pravdivé buď všechny klauzule formule φ, nebo všechny klauzule až na jednu. Formálně, pokud $\varphi \equiv C_1 \wedge \ldots \wedge C_k$, kde $C_1, \ldots, C_k$ jsou klauzule se třemi literály, pak φ je téměř splnitelná pokud je splnitelná nebo pokud existuje valuace ν a číslo $1 \leq j \leq k$ takové, že $\nu(C_j) = \mathit{false}$ a $\nu(C_\ell) = \mathit{true}$ pro všechna $1 \leq \ell \leq k$, $\ell \neq j$. (Pozn.: nebo je zde ve významu klasického „or“. Tedy formule která je splnitelná a *zároveň* má přiřazení, které splňuje všechny klauzule až na jednu, je rovněž téměř splnitelná. Nejde o „xor“.)

Uvažme nyní problém

$$\mathit{ALMOST\text{-}SAT} = \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi \text{ je výroková formule v 3cnf a } \varphi \text{ je téměř splnitelná}\}.$$

Dokažte, že *ALMOST-SAT* je NP-úplný.

Příslušnost do NP. Problém *ALMOST-SAT* je rozhodován např. nedeterministickým Turingovým strojem, který pracuje následovně: stroj nejprve deterministicky ověří, zda vstup je kódem nějaké formule φ v 3cnf (to lze jistě učinit v polynomiálním čase). Pokud tomu tak není, ihned zamítne. V opačném případě nedeterministicky uhádne pravdivostní přiřazení proměnným ve φ (lineární čas vzhledem k počtu proměnných, tedy i vzhledem k velikosti formule). Následně deterministicky spočítá, kolik klauzulí je tímto přiřazením splněno. To lze opět provést v polynomiálním čase vzhledem k velikosti formule, neboť stačí pro každou klauzuli zkontrolovat, zda alespoň jeden její literál se vyhodnotí na *true,* a pokud ano, inkrementovat čítač splněných klauzulí. Pokud výsledný počet splněných klauzulí je alespoň $m-1$, kde m je počet klauzulí ve φ, stroj akceptuje, jinak zamítne. Všechny uvedené operace lze na Turingově stroji implementovat v polynomiálním čase, tedy uvedený stroj má polynomiální časovou složitost.

NP-těžkost. Ukážeme, že $\mathit{3\text{-}SAT} \leq_p \mathit{ALMOST\text{-}SAT}$. Uvažme funkci f, která je pro vstupní řetězec w definována takto: pokud w není kódem formule v 3cnf, pak $f(w) = w$. V opačném případě můžeme psát $w = \langle\varphi\rangle$ a položit $f(w) = \langle\varphi \wedge (x \vee x \vee x) \wedge (\neg x \vee \neg x \vee \neg x)\rangle$, kde x je proměnná nevyskytující se ve φ. Funkce f je vyčíslitelná deterministickým strojem s polynomiální časovou složitostí: stroj nejprve zkontroluje, zda vstup je kódem formule, a pokud ano, vygeneruje nějaké jméno proměnné x, která se nevyskytuje ve φ (jistě lze vykonat v polynomiálním čase přímočarým projitím formule φ), připíše za φ výše uvedené dvě klauzule a výslednou formuli zakóduje.

Zbývá ukázat, že $w \in \mathit{3\text{-}SAT} \Leftrightarrow f(w) \in \mathit{ALMOST\text{-}SAT}$. Tato ekvivalence zřejmě platí pro w, která nejsou kódy 3cnf formulí. Ve zbytku důkazu tedy předpokládejme, že $w = \langle\varphi\rangle$, kde φ je formule v 3cnf.

“$\Rightarrow$” Nechť $\langle\varphi\rangle \in \mathit{3\text{-}SAT}$. Pak existuje přiřazení ν proměnným ve φ takové, že $\nu(\varphi) = \mathit{true}$. Rozšiřme ν o nějaké přiřazení hodnoty proměnné x; tato hodnota může být libovolná, pro určitost položme x rovno *true*. Toto rozšířené přiřazení stále splňuje všechny klauzule ve φ a navíc splňuje klauzuli $(x \vee x \vee x)$. Tedy formule $\varphi \wedge (x \vee x \vee x) \wedge (\neg x \vee \neg x \vee \neg x)$ je téměř splnitelná a proto $f(\langle\varphi\rangle) \in \mathit{ALMOST\text{-}SAT}$.

“$\Leftarrow$” Nechť $f(\langle\varphi\rangle) \in \mathit{ALMOST\text{-}SAT}$, tj. formule $\varphi \wedge (x \vee x \vee x) \wedge (\neg x \vee \neg x \vee \neg x)$ je téměř splnitelná, tj. existuje přiřazení μ, které splní všechny klauzule této formule až na jednu. Všimněme si, že poslední dvě klauzule této formule nemohou být splněny zároveň: pokud jedna je *true*, pak druhá musí být *false* a naopak. Tedy ona jedna klauzule nesplněná přiřazením μ musí být jednou z těchto posledních dvou klauzulí. Zejména μ splňuje všechny klauzule ve φ a tedy i celou formuli φ. Dostáváme $\langle\varphi\rangle \in \mathit{3\text{-}SAT}$.