Jméno: Novotný Petr **UČO:** 1234567

0007 *list* 1 *učo* 1234567 *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

2*. [3,5 bodu] Nechť $\mathcal{A}$ je deterministický konečný automat (DFA) se vstupní abecedou Σ (připomeňme, že Σ je dána jakožto součást n-tice popisující $\mathcal{A}$). Řekneme, že $\mathcal{A}$ je *znakově univerzální* pokud existuje slovo $w \in \Sigma^*$ akceptované automatem $\mathcal{A}$ takové, že každý znak abecedy Σ se ve w vyskytuje alespoň jednou (formálně, s využitím značení z FJA/Automatů: $\forall a \in \Sigma : \#_a(w) \geq 1$).

Dokažte, že problém

$$\mathit{CHAR\text{-}UNIV} = \{\langle \mathcal{A} \rangle \mid \mathcal{A} \text{ je znakově univerzální DFA } \}$$

je NP-úplný.

Důkaz NP-těžkosti je možné provést zcela stejně, jako u jednoduššího zadání.

U důkazu příslušnosti do NP je třeba ukázat, že existuje polynom p takový, že znakově univerzální $\mathcal{A}$ velikosti n vždy akceptuje slovo, které obsahuje každý znak alespoň jednou a má délku nejvýše $p(n)$. Je pak možné použít stejný nedeterministický polynomiální algoritmus jako u jednoduššího zadání s tím rozdílem, že tento algoritmus bude hádat slovo délky nejvýše $p(n)$. Velikostí automatu $\mathcal{A}$ rozumíme délku slova $\langle \mathcal{A} \rangle$. Jistě $|\langle \mathcal{A} \rangle| \geq |Q| + |\Sigma|$, kde Q je množina stavů a Σ je vstupní abeceda automatu $\mathcal{A}$.

Ukážeme tedy, že každý znakově univerzální DFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_{init}, F)$ akceptuje slovo délky nejvýše $|Q| \cdot (|\Sigma| + 1)$, které obsahuje každý znak vstupní abecedy alespoň jednou. Sporem. Nechť u je nejkratší slovo obsahující všechny znaky, které je automatem akceptováno. Předpokládejme, že $|u| > |Q| \cdot (|\Sigma| + 1)$. Pak při výpočtu $\mathcal{A}$ na slově u se nějaký stav q musí zopakovat alespoň $(|\Sigma| + 2)$-krát. Existuje tedy rozdělení $u = vu_1u_2 \cdots u_nw$, kde $n = |\Sigma| + 1$, $v, w \in \Sigma^*$ a $u_i \in \Sigma^+$, takové, že po přečtení v se automat nachází v q a rovněž pro libovolné $1 \leq i \leq n$ se po přečtení prefixu $vu_1 \cdots u_i$ výpočet nachází ve stavu q (tj. čtení podslova u_i odpovídá cyklu ve výpočtu). Řekneme, že $1 \leq i \leq n$ je *zbytečné*, pokud všechny znaky v u_i jsou již obsaženy ve $vu_1 \cdots u_{i-1}$ (resp. ve v, pro $i = 1$). Protože $n = |\Sigma| + 1$, pak existuje zbytečné $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ovšem pak odstraněním podslova u_i z u získáme slovo u', které obsahuje ty samé znaky, co u (tj. všechny znaky ze Σ), je akceptováno (neboť z příslušného výpočtu jsme pouze odstranili jeden cyklus, zejména po přečtení u' jsme ve stejném stavu, jako po přečtení u), a zároveň je kratší než u. Spor s volbou u.