

Jméno: Ferda Mravenec

UČO: 1234567

0007

líst

|

učo

1234567

body

Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte  
leva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Uvažme funkci  $f: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  definovanou následovně:

$$f(i, j, k) = \begin{cases} \varphi_j(\varphi_i(k)) & \text{pokud } \varphi_i(k) \neq \perp, \\ \varphi_i(k) & \text{jinak.} \end{cases}$$

- a) (2 body) Rozhodněte a dokažte, zda je funkce  $f$  vyčíslitelná.  
b) (1 bod) Rozhodněte a dokažte, zda existuje totálně vyčíslitelná funkce  $h: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  taková, že pro všechna  $i, j, k \in \mathbb{N}$  platí

$$\varphi_{h(j,k)}(i) = f(i, j, k).$$

- a) Funkce  $f$  je vyčíslitelná, neboť je počítaná následujícím programem (kde  $\Phi$  je univerzální funkce pro vyčíslitelné funkce arity 1):

```
begin
  y :=  $\Phi(x_1, x_3)$ ;
  x1 :=  $\Phi(x_2, y)$ 
end
```

Vskutku, pokud je  $\varphi_i(k)$  definováno, tak program spočítá  $\varphi_j(\varphi_i(k))$ , což je v souladu s prvním řádkem definice funkce  $f$ . V opačném případě program cyklí, což je v souladu s druhým řádkem definice  $f$ .

- b) Ano, funkce  $h$  s požadovanými vlastnostmi existuje. Z odrážky a) víme, že funkce  $f$  je vyčíslitelná, a tedy  $f = \varphi_e^{(3)}$  pro nějaké  $e \in \mathbb{N}$ . Nechtě  $f': \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  je funkce definovaná vztahem  $f'(j, k, i) = f(i, j, k)$ . Funkce  $f'$  je zřejmě vyčíslitelná, ale pro úplnost uvádíme program, který ji počítá (tentokrát je  $\Phi$  univerzální funkce pro vyčíslitelné funkce arity 3):

```
begin
  x1 :=  $\Phi(e, x_3, x_1, x_2)$ 
end
```

Dle translačního lematu pro ternární funkce existuje totálně vyčíslitelná binární funkce  $h$  taková, že  $\varphi_{h(j,k)}(i) = f'(j, k, i) = f(i, j, k)$ , což jsme měli dokázat.