

Jméno: Brouk Pytlík

UČO: 1234567

0007

líst

|

učo

1234567

body

Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

1. [3 body] Uvažme množinu

$$B = \{i \mid \varphi_i(x) = 7 \text{ pro nekonečně mnoho různých } x \in \mathbb{N}\}.$$

- (a) Rozhodněte a dokažte, zda je množina B rekurzivní.
 (b) Rozhodněte a dokažte, zda je množina B rekurzivně spočetná.

(a) Množina B není rekurzivní.

Množina B je netriviální vlastní podmnožina \mathbb{N} : Indexy prázdné funkce $f(x) = \perp$, která je vyčíslitelná, do množiny B zjevně nepatří, tedy $B \neq \mathbb{N}$. Naopak indexy konstantní funkce $g(x) = 7$, která je také vyčíslitelná, do množiny B patří, tedy $B \neq \emptyset$.

Množina B respektuje funkce: Uvažme libovolné $i, j \in \mathbb{N}$ splňující $i \in B$ a $\varphi_i = \varphi_j$. Tedy $\varphi_i(x) = 7$ pro nekonečně mnoho různých $x \in \mathbb{N}$ a pro všechna tato x platí $\varphi_j(x) = \varphi_i(x) = 7$. Dostáváme, že $\varphi_j(x) = 7$ pro nekonečně mnoho různých $x \in \mathbb{N}$ a proto $j \in B$.

Z 1. Riceovy věty plyne, že množina B není rekurzivní.

(b) Množina B není je rekurzivně spočetná.

V předchozím bodě jsme již dokázali, že B respektuje funkce.

Zvolme θ jako konstantní funkci $\theta(x) = 7$. Tato funkce je vyčíslitelná a všechny její indexy leží v B , tedy $\{i \mid \varphi_i = \theta\} \subseteq B$.

Nyní uvažme libovolnou vyčíslitelnou funkci φ_j s konečným definičním oborem, která splňuje $\varphi_j \leq \theta$. Jelikož φ_j je definovaná jen pro konečně mnoho různých argumentů, nemůže existovat nekonečně mnoho různých vstupů x splňujících $\varphi_j(x) = 7$ a proto $j \notin B$. Tím jsme dokázali

$$\{j \mid \varphi_j \leq \theta \text{ a } \text{dom}(\varphi_j) \text{ je konečná množina}\} \subseteq \overline{B}.$$

Z třetí Riceovy věty plyne, že množina B není je rekurzivně spočetná.