Jméno: Chrobák Truhlík **UČO:** 1234567

0007 *list* 1 *učo* 1234567 *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. [3 body] Uvažme množinu $B \subseteq \mathbb{N}$ definovanou vztahem

$$B = \{i \mid dom(\varphi_i) \smallsetminus \{0,1\} \neq \emptyset \ \text{ a } \ \forall y \in \mathbb{N} \,.\, \varphi_i(y) = \varphi_i(y^2) = \ldots = \varphi_i(y^y)\}.$$

(a) Rozhodněte a dokažte, zda je množina B rekurzivní.

(b) Rozhodněte a dokažte, zda je množina B rekurzivně spočetná.

(a) Množina B není rekurzivní, což dokážeme pomocí 1. Riceovy věty.

- $B \neq \emptyset$**:** Konstantní funkce $g(x) = 1$ je vyčíslitelná a její indexy patří do B, protože $dom(g) \smallsetminus \{0,1\} = \mathbb{N} \smallsetminus \{0,1\} \neq \emptyset$ a $\forall y, x \in \mathbb{N} \,.\, g(y) = g(x) = 1$. Tedy $\{i \mid \varphi_i = g\} \subseteq B$ a proto $B \neq \emptyset$.
- $B \subsetneq \mathbb{N}$**:** Prázdná funkce $\varepsilon(x) = \bot$ je vyčíslitelná a její indexy do B nepatří, protože $dom(\varepsilon) = \emptyset$. Tedy $\{i \mid \varphi_i = \varepsilon\} \subseteq \overline{B}$ a proto $B \subsetneq \mathbb{N}$.
- B **respektuje funkce:** Uvažme libovolné $i, j \in \mathbb{N}$ splňující $i \in B$ a $\varphi_i = \varphi_j$. Jelikož $dom(\varphi_i) = dom(\varphi_j)$ a pro každé $y \in \mathbb{N}$ platí $\varphi_i(y) = \varphi_j(y) = \varphi_i(y^2) = \varphi_j(y^2) = ... = \varphi_i(y^y) = \varphi_j(y^y)$, dostáváme $j \in B$.

Z 1. Riceovy věty plyne, že množina B není rekurzivní.

(b) Množina B není rekurzivne spočetná, což dokážeme pomocí 3. Riceovy věty. V předchozím bodě jsme již dokázali, že B respektuje funkce. Nyní zvolme θ jako konstantní funkci $\theta(x) = 1$, což je vyčíslitelná funkce.

- $\{i \mid \varphi_i = \theta\} \subseteq B$**:** V předchozím bodě jsme zdůvodnili, že indexy konstantní funkce $\theta(x) = g(x) = 1$ leží v B, tedy $\{i \mid \varphi_i = \theta\} \subseteq B$.
- $\{i \mid \varphi_i \leq \theta$ **a** $dom(\varphi_i)$ **je konečná množina**$\} \subseteq \overline{B}$**:** Uvažme libovolnou vyčíslitelnou funkci φ_i s konečným definičním oborem, která splňuje $\varphi_i \leq \theta$. Sporem dokážeme, že $i \notin B$. Předpokládejme opak a označme m největší prvek v $dom(\varphi_i)$. Z předpokladu $dom(\varphi_i) \smallsetminus \{0,1\} \neq \emptyset$ plyne, že $m \geq 2$. Z podmínky $\forall y \in \mathbb{N} \,.\, \varphi_i(y) = \varphi_i(y^2) = \ldots = \varphi_i(y^y)$ dále plyne, že $\varphi_i(m) = \varphi_i(m^2)$ a tedy $m^2 \in dom(\varphi_i)$. Jelikož $m^2 > m$, dostáváme spor s volbou m jako největšího prvku v $dom(\varphi_i)$. Tím jsme dokázali, že

$$\{i \mid \varphi_i \leq \theta \text{ a } dom(\varphi_i) \text{ je konečná množina}\} \subseteq \overline{B}.$$

Z 3. Riceovy věty plyne, že množina B není rekurzivně spočetná.

Oblast strojově snímaných informací, nezasahujte.