Jméno: Nesmáčivá Plotice **UČO:** 1234567

2. [3 body] *Omezenou soustavou rovnic* nazveme soustavu lineárních rovnic tvaru

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

kde $m, n > 0$ a všechny lineární koeficienty $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ a absolutní členy $b_1, b_2, \dots, b_m$ jsou nezáporná celá čísla. Uvažme problém rozhodnout, zda má omezená soustava rovnic řešení $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}$, tedy problém

$$OSR = \{\langle S \rangle \mid S \text{ je omezená soustava rovnic, která má řešení využívající pouze hodnot } \{0,1\}\}.$$

Dokažte, že problém *OSR* je NP-těžký. *(K důkazu můžete využít znalost NP-úplných problémů z přednášky. Pokud budete chtít využít NP-těžkost nějakého jiného problému, tak ji také dokažte.)*

V důkazu ukážeme, že NP-úplný problém

$$\mathit{VERTEX\text{-}COVER} = \{\langle G, k \rangle \mid G \text{ je graf s vrcholovýmm pokrytím obsahujícím právě } k \text{ vrcholů}\}$$

lze polynomiálně zredukovat na *OSR*, z čehož ihned plyne, že *OSR* je NP-těžký.

Redukci $\mathit{VERTEX\text{-}COVER} \le_p \mathit{OSR}$ lze realizovat například redukční funkcí f popsanou vztahem

$$f(x) = \begin{cases} \langle 0x = 1 \rangle & \text{pokud } x \text{ není tvaru } \langle G, k \rangle \text{, kde } G \text{ je neorientovaný graf a } k \in \mathbb{N}, \\ \langle S \rangle & \text{pokud } x = \langle G, k \rangle \text{ pro nějaký neorientovaný graf } G \text{ a } k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

kde S je omezená soustava rovnic definovaná následovně. Předpokládejme, že G má n vrcholů a m hran. Vrcholům přiřadíme proměnné $x_1, \dots, x_n$ a hranám proměnné $y_1, \dots, y_m$. Proměnná x_i značí, zda je i-tý vrchol ve vrcholovém pokrytí. Soustava bude mít $m + 1$ rovnic. Intuitivní význam první rovnice

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

je, že pokrytí má obsahovat právě k vrcholů. Dále bude soustava obsahovat jednu rovnici pro každou z m hran. Pokud l-tá hrana spojuje i-tý a j-tý vrchol, pak odpovídající rovnice

$$x_i + x_j + y_l = 2$$

říká, že alespoň jeden z těchto vrcholů je v pokrytí. Soustava obsahuje $m + 1$ rovnic, $m + n$ proměnných a konstanty $0, 1, 2, k$. Funkci f lze jistě počítat deterministickým Turingovým strojem v polynomiálním čase.

Zbývá dokázat ekvivalenci $x \in \mathit{VERTEX\text{-}COVER} \iff f(x) \in \mathit{OSR}$. Pokud x není tvaru $\langle G, k \rangle$, kde G je neorientovaný graf a $k \in \mathbb{N}$, vrací $f(x)$ kód jednoduché soustavy, která nemá řešení. V tomto případě ekvivalence platí, protože $x \notin \mathit{VERTEX\text{-}COVER}$ a $f(x) \notin \mathit{OSR}$. V dalším budeme předpokládat, že $x = \langle G, k \rangle$ pro nějaký neorientovaný graf G a $k \in \mathbb{N}$ a tedy $f(x) = \langle S \rangle$.

"$\Longrightarrow$" Nechť G má vrcholové pokrytí o k vrcholech. Řešení soustavy S odvodíme následovně.

- Je-li i-tý vrchol grafu G v uvažovaném prokrytí, pak $x_i = 1$, jinak $x_i = 0$. Takové ohodnocení proměnných je zjevně řešením rovnice $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$.

– Pro l-tou hranu spojující i-tý a j-tý vrchol grafu G položíme $y_l = 2 - (x_i + x_j)$. Jelikož uvažované vrcholové pokrytí obsahuje alespoň jeden z těchto vrcholů, platí $1 \leq x_i + x_j \leq 2$ a proto $0 \leq y_l \leq 1$.

Snadno vidíme, že toto ohodnocení proměnných je vskutku řešením soustavy S.

"$\Longleftarrow$" Předpokládejme, že S má řešení $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in \{0, 1\}$ a uvažme množinu vrcholů, pro které má odpovídající proměnná hodnotu 1. První rovnice říká, že těchto vrcholů je právě k. Rovnice pro každou hranu pak říká, že alespoň jeden z jejích vrcholů je v této množině. Tedy tato množina tvoří vrcholové pokrytí obsahující právě k vrcholů.