

1. (25 bodů) Rozhodněte, zda je následující funkce  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  vyčíslitelná.

$$f(i, j) = \begin{cases} \varphi_i(107) & \text{pokud pro nějaké } y \in W_i \cap W_j \text{ platí } \varphi_i(y) = \varphi_j(y) \\ \perp & \text{jinak} \end{cases}$$

Své rozhodnutí dokažte. (Pro důkaz, že funkce je vyčíslitelná, stačí napsat while-program, který ji počítá.)

2. (40 bodů) Binární operaci  $\diamond$  na množinách  $A, B \subseteq \mathbb{N}$  definujeme jako

$$A \diamond B = \{i \mid i \in A \text{ a } i \text{ je sudé}\} \cup \{i \mid i \in B \text{ a } i \text{ je liché}\}.$$

Rozhodněte a dokažte, zda je na tuto operaci uzavřená

- (a) třída všech rekurzivních množin,
- (b) třída všech rekurzivně spočetných množin.

3. (35 bodů) Řekneme, že neorientovaný graf obsahuje dvojitou  $k$ -kliku pro dané  $k > 1$ , pokud obsahuje dvě různé  $k$ -kliky, které sdílí alespoň jeden společný vrchol. Dokažte, že problém rozhodnout, zda daný neorientovaný konečný graf  $G$  pro dané  $k$  obsahuje dvojitou  $k$ -kliku, je NP-úplný. Formálně problém definujeme jako množinu

$$DOUBLE-CLIQUE = \{\langle G, k \rangle \mid G \text{ je graf obsahující dvojitou } k\text{-kliku}\}.$$