

1. (25 bodů) Rozhodněte, zda je následující funkce $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ vyčíslitelná.

$$f(i, j) = \begin{cases} \varphi_i(107) & \text{pokud pro nějaké } y \in W_i \cap W_j \text{ platí } \varphi_i(y) = \varphi_j(y) \\ \perp & \text{jinak} \end{cases}$$

Své rozhodnutí dokažte. (Pro důkaz, že funkce je vyčíslitelná, stačí napsat *while-program*, který ji počítá.)

Řešení: Funkce f je vyčíslitelná, počítá ji například následující program.

begin

$n := 0;$

$flag := 0;$

while $flag = 0$ **do begin**

$y := \pi_1(n);$

$z := \pi_2(n);$

if $Sc(x_1, y, z) = 1 \wedge Sc(x_2, y, z) = 1$ **then**

if $\Phi(x_1, y) = \Phi(x_2, y)$ **then** $flag := 1;$

$n := n + 1;$

end

$x_1 := \Phi(x_1, 107);$

end

Program pro vstup (i, j) postupně prohledává všechny dvojice $(y, z) \in \mathbb{N}^2$. Pro každou dvojici ověří, zda programy P_i a P_j skončí na vstupu y během z kroků (a tudíž $y \in W_i \cap W_j$) a následně zda $\varphi_i(y) = \varphi_j(y)$. Pokud dvojice splní obě podmínky, program vrátí hodnotu $\varphi_i(107)$.

2. (40 bodů) Binární operaci \diamond na množinách $A, B \subseteq \mathbb{N}$ definujeme jako

$$A \diamond B = \{i \mid i \in A \text{ a } i \text{ je sudé}\} \cup \{i \mid i \in B \text{ a } i \text{ je liché}\}.$$

Rozhodněte a dokažte, zda je na tuto operaci uzavřená

- (a) třída všech rekurzivních množin,
- (b) třída všech rekurzivně spočetných množin.

Řešení: Obě třídy jsou uzavřené na operaci \diamond .

- (a) Necht' $A, B \subseteq \mathbb{N}$ jsou rekurzivní množiny. Pak jejich charakteristické funkce χ_A, χ_B jsou TVF. Množina $A \diamond B$ je také rekurzivní, neboť její charakteristická funkce je vyčíslitelná například tímto programem:

```
begin  
   $y := x_1 \bmod 2$ ;  
  if  $y = 0$  then  $x_1 := \chi_A(x_1)$ ;  
  if  $y = 1$  then  $x_1 := \chi_B(x_1)$ ;  
end
```

- (b) Necht' A, B jsou r.e. množiny, tedy $A = \text{dom}(\varphi_i)$ a $B = \text{dom}(\varphi_j)$ pro nějaké $i, j \in \mathbb{N}$. Množina $A \diamond B$ je také r.e., protože je definičním oborem vyčíslitelné funkce počítané tímto programem:

```
begin  
   $y := x_1 \bmod 2$ ;  
  if  $y = 0$  then  $\Phi(i, x_1)$ ;  
  if  $y = 1$  then  $\Phi(j, x_1)$ ;  
end
```

3. (35 bodů) Řekneme, že neorientovaný graf obsahuje *dvojitou k -kliku* pro dané $k > 1$, pokud obsahuje dvě různé k -kliky, které sdílí alespoň jeden společný vrchol. Dokažte, že problém rozhodnout, zda daný neorientovaný konečný graf G pro dané k obsahuje dvojitou k -kliku, je NP-úplný. Formálně problém definujeme jako množinu

$$DOUBLE-CLIQUE = \{\langle G, k \rangle \mid G \text{ je graf obsahující dvojitou } k\text{-kliku}\}.$$

Řešení: Nejprve ukážeme, že $DOUBLE-CLIQUE \in NP$. Problém rozhoduje například nedeterministický TM, který nejdříve zjistí, zda vstup je tvaru $\langle G, k \rangle$. Pokud tomu tak není, stroj zamítne. Je-li k větší než počet vrcholů v grafu G , stroj také zamítne. Nyní stroj nedeterministicky vybere dvě podmnožiny vrcholů grafu G tak, aby každá obsahovala právě k vrcholů. Pokud jsou tyto množiny totožné nebo mají prázdný průnik, stroj zamítne. Nyní stačí ověřit, že vrcholy v každé množině tvoří k -kliku. Pokud tomu tak je, stroj akceptuje. V opačném případě zamítne. Popsaný výpočet lze provést v polynomiálním počtu kroků vzhledem k velikosti vstupu.

NP-těžkost dokážeme redukcí $CLIQUE \leq_p DOUBLE-CLIQUE$ z NP-úplného problému $CLIQUE$. Redukční funkci f definujeme takto:

- Pokud vstupní řetězec není kódem dvojice $\langle G, k \rangle$, pak funkce f dá na výstup stejný řetězec.
- Je-li vstupem kód dvojice $\langle G, k \rangle$, pak funkce f vrátí kód $\langle G', k + 1 \rangle$, kde G' je graf obsahující dvě kopie grafu G a navíc jeden přidáný vrchol, který má hranu do každého vrcholu. Pokud $G = (V, E)$, pak G' formálně definujeme jako (V', E') , kde $V' = \{v, v' \mid v \in V\} \cup \{w\}$ a $E' = \{\{v_1, v_2\}, \{v'_1, v'_2\} \mid \{v_1, v_2\} \in E\} \cup \{\{v, w\}, \{v', w\} \mid v \in V\}$. Pokud graf G obsahoval n vrcholů, pak G' obsahuje $2n + 1$ vrcholů.

Redukční funkce je zjevně totálně vyčíslitelná deterministickým TM pracujícím v polynomiálním čase.

Zbývá dokázat, že $x \in CLIQUE \iff f(x) \in DOUBLE-CLIQUE$.

“ \implies ” Pokud $x \in CLIQUE$, pak x je kódem dvojice $\langle G, k \rangle$, kde G obsahuje k -kliku. Nechť W je množina vrcholů této k -kliky. Pak G' obsahuje dvě $(k + 1)$ -kliky, kde jedna je tvořena vrcholy $W \cup \{w\}$ a druhá vrcholy $\{v' \mid v \in W\} \cup \{w\}$. Jedná se o různé kliky, které však mají společný vrchol w . Tedy $f(x) = \langle G', k + 1 \rangle \in DOUBLE-CLIQUE$.

“ \impliedby ” Pokud $f(x) \in DOUBLE-CLIQUE$, pak $f(x) = \langle G', k + 1 \rangle$ a G' je graf obsahující dvojitou $(k + 1)$ -kliku. Vezměme jednu z těchto $(k + 1)$ -klik. Jelikož graf G' neobsahuje žádnou hranu spojující dvě kopie grafu G , tak celá tato $(k + 1)$ -klikka musí ležet v jedné kopii grafu G rozšířené o vrchol w . Vypustíme-li z této $(k + 1)$ -kliky

- vrchol w , pokud je v ní obsažen, nebo
- jeden libovolný vrchol, pokud $(k + 1)$ -klikka neobsahuje w ,

získáme nutně k -kliku v jedné z kopií grafu G . Graf G tedy obsahuje k -kliku a proto platí $x \in CLIQUE$.