Příklad 4. Pomocí vytvořující funkce vyřešte následující rekurenci:

$$a_0 = 0, \qquad a_{-1} = a_{-2} = \dots 0$$
$$a_n = 2a_{n-1} + 3n^2 + 2n + 5, n \geq 1.$$

$$\sum_k [k=\ell]\, x^k = x^\ell$$

1) $a_k = 2a_{k-1} + 3k^2 + 2k + 5 - 5\cdot[k=0]$

$a_0 = 0 + 0 + 0 + 5 - 5$

2) $/\cdot x^k \quad / \sum_k \qquad \boxed{3k^2+2k+5 = 6\binom{k+2}{2} - 7\binom{k+1}{1} + 6\binom{k+0}{0}}$

$\binom{k+2}{2} = \frac{1}{2}(k^2+3k+2), \quad \binom{k+1}{1} = k+1, \quad \binom{k+0}{0} = 1$

$$\sum a_{k-1}x^k = \left(\sum a_{k-1}x^{k-1}\right)\cdot x = \left(\sum a_k x^k\right)\cdot x = A(x)\cdot x$$

$$A(x) = \sum_k a_k x^k = 2\underbrace{\sum_k a_{k-1}x^k}_{x\cdot A(x)} + 6\underbrace{\sum \binom{k+2}{2}x^k}_{\frac{1}{(1-x)^3}} - 7\underbrace{\sum\binom{k+1}{1}x^k}_{\frac{1}{(1-x)^2}} + 6\underbrace{\sum\binom{k+0}{0}x^k}_{\frac{1}{1-x}} - 5$$

$$A(x) = 2xA(x) + \frac{6}{(1-x)^3} - \frac{7}{(1-x)^2} + \frac{6}{1-x} - 5$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_k \binom{k+n-1}{n-1}x^k$$

$$(1-2x)\cdot A(x) = \frac{6}{(1-x)^3} - \frac{7}{(1-x)^2} + \frac{6}{1-x} - 5$$

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{-1}{1-x} + \frac{2}{1-2x} \qquad /\cdot\frac{1}{1-x}$$

$4x$

$$\frac{1}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{-1}{(1-x)^2} + \frac{-2}{1-x} + \frac{4}{1-2x} \qquad /\cdot\frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{(1-x)^3(1-2x)} = \frac{-1}{(1-x)^3} + \frac{-2}{(1-x)^2} + \frac{-4}{1-x} + \frac{8}{1-2x}$$

$$A(x) = \frac{6}{(1-x)^3(1-2x)} - \frac{7}{(1-x)^2(1-2x)} + \frac{6}{(1-x)(1-2x)} - \frac{5}{1-2x}$$

$$= \frac{-6}{(1-x)^3} + \frac{-5}{(1-x)^2} + \frac{-16}{1-x} + \frac{27}{1-2x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum x^k$$

$$= \sum_k \left(-6\cdot\binom{k+2}{2} - 5\binom{k+1}{1} - 16 + 27\cdot \underbrace{2^k\right)x^k}_{(2x)^k}$$

$a_1 = -6\cdot 3 - 5\cdot 2 - 16 + 27\cdot 2$

$$a_k = -6\cdot\binom{k+2}{2} - 5\binom{k+1}{1} - 16 + 27\cdot 2^k$$

$k = 0$ ✓

Příklad 5. Pomocí vytvořující funkce vyřešte následující rekurenci:

$$a_0 = 1; a_1 = 3,$$
$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, n \geq 2.$$

$(1, 0, 0, \dots) \longrightarrow 1$

$$a_k = 3a_{k-1} - 2a_{k-2} + 0 \cdot [k=1] + 1 \cdot [k=0]$$

$k=0: \quad 1 = 0 + 0 + 1$

$k=1: \quad 3 = 3 + 0 + 0$

$/ \cdot x^k$

$/ \sum_k$

$$A(x) = \sum_k a_k \cdot x^k$$

$(a_k) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ $\quad \cdot x$

$(a_{k-1}) = (0, a_0, a_1, a_2, \dots)$

$$A(x) = 3 \cdot \underbrace{\sum a_{k-1} x^k}_{x \cdot A(x)} - 2 \underbrace{\sum a_{k-2} x^k}_{x^2 \cdot A(x)} + 1$$

$$A(x) = 3x \cdot A(x) - 2x^2 \cdot A(x) + 1$$

$$(1 - 3x + 2x^2) \cdot A(x) = 1$$

$$A(x) = \frac{1}{1 - 3x + 2x^2} = \frac{C}{1-2x} + \frac{D}{1-x} = \frac{C(1-x) + D(1-2x)}{(1-2x)(1-x)}$$

$$t^2 - 3t + 2 = (t-2)(t-1)$$

$$1 = C(1-x) + D(1-2x)$$

dosadíme:

$x = 1 \Rightarrow 1 = D \cdot (-1) \Rightarrow D = -1$

$x = 1/2 \Rightarrow 1 = C \cdot 1/2 \Rightarrow C = 2$

$$A(x) = \frac{2}{1-2x} + \frac{-1}{1-x}$$

$$= \sum_k (2 \cdot 2^k - 1) \cdot x^k \Rightarrow a_k = 2 \cdot 2^k - 1$$

$a_0 = 1$ ✓

$a_1 = 3$ ✓

$$\underline{\underline{2 \cdot 2^k - 1}} = a_k \overset{?}{=} 3a_{k-1} - 2a_{k-2} = 3 \cdot (2 \cdot 2^{k-1} - 1) - 2 \cdot (2 \cdot 2^{k-2} - 1)$$
$$= 3 \cdot 2^k - 3 - 2^k + 2 = \underline{\underline{2 \cdot 2^k - 1}}$$

✓

6 z minule

15. listopadu 2021 12:52

Příklad 6. Pomocí vytvořující funkce vyřešte následující rekurenci:

$$a_0 = -4; a_1 = -9,$$
$$a_n = 6a_{n-1} \cancel{+} - 5a_{n-2} + 16n, n \geq 2.$$

$a_2 = 6a_1 - 5a_0 + 32 = -2$

$a_3 = 6a_2 - 5a_1 + 48 = 81$

$$a_k = 6a_{k-1} - 5a_{k-2} + 16k - \overset{P}{1} \cdot [k=1] - \overset{Q}{4} \cdot [k=0] \quad / \cdot x^k \quad / \sum_k$$

$k=0: \quad -4 = 0 - 0 + 0 \quad -4$

$k=1: \quad -9 = -24 - 0 + 16 - 1$

$$A(x) = \sum_k a_k \cdot x^k$$

posl. $(k+1) = \left(\binom{k+1}{1}\right)$ posunutá o jedna

$$A(x) = 6 \cdot \underbrace{\sum a_{k-1} \cdot x^k}_{x \cdot A(x)} - 5 \cdot \underbrace{\sum a_{k-2} \cdot x^k}_{x^2 \cdot A(x)} + 16 \underbrace{\sum k \cdot x^k}_{\sum\left(\binom{k+1}{1} - \binom{k+0}{0}\right) \cdot x^k} - x - 4 \quad +Px+Q$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} \qquad \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$A(x) = 6 \cdot x \cdot A(x) - 5 \cdot x^2 \cdot A(x) + 16 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}\right)}_{\frac{x}{(1-x)^2}} - x - 4$$

nějaký kubický polynom

$$(1 - 6x + 5x^2) \cdot A(x) = \frac{\overbrace{16x - (x+4)(1-x)^2}}{(1-x)^2}$$

$$A(x) = \frac{16x - (x+4)(1-x)^2}{(1-x)^2 \underbrace{(1-6x+5x^2)}_{(1-x)(1-5x)}}$$

$t^2 - 6t + 5$

$(t-5)(t-1)$

$$= \frac{16x - (x+4)(1-x)^2}{(1-x)^3 (1-5x)}$$

$$= \frac{C}{(1-x)^3} + \frac{D}{(1-x)^2} + \frac{E}{1-x} + \frac{F}{1-5x}$$

$$A(x) = \sum \left(C \cdot \binom{k+2}{2} + D \cdot \binom{k+1}{1} + E + F \cdot 5^k\right) \cdot x^k$$

$$a_k = C \cdot \binom{k+2}{2} + D \cdot \binom{k+1}{1} + E + F \cdot 5^k$$

zbývá: dopočítat C, D, E, F ze znalosti a_0, a_1, a_2, a_3

$C \cdot 1 + D \cdot 1 + E \cdot 1 + F \cdot 1 = a_0 = -4$
$C \cdot 3 + D \cdot 2 + E \cdot 1 + F \cdot 5 = a_1 = -9$ } přímo ze zadání

$C \cdot 6 + D \cdot 3 + E \cdot 1 + F \cdot 25 = a_2 = -2$
$C \cdot 10 + D \cdot 4 + E \cdot 1 + F \cdot 125 = a_3 = 81$ } z rekurent. vztahu ze zadání

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & -9 \\ 6 & 3 & 1 & 25 & -2 \\ 10 & 4 & 1 & 125 & 81 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 15 & 16 \\ 0 & -6 & -9 & 115 & 121 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - 3 \cdot I \\ III - 2 \cdot II \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 15 & 16 \\ 0 & -6 & -9 & 115 & 121 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & 103 & 103 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} C & D & E & F & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 64 & 64 \end{array}\right) \end{array}$$

$$F = 1 \Rightarrow F = 1$$

$$E + 13 = 13 \Rightarrow E = 0$$

$$D + 0 - 2 = -3 \Rightarrow D = -1$$

$$C - 1 + 0 + 1 = -4 \Rightarrow C = -4$$

$$a_k = C \cdot \binom{k+2}{2} + D \cdot \binom{k+1}{1} + E + F \cdot 5^k$$

$$= -4 \binom{k+2}{2} - 1 \, (k+1) + 5^k =$$

$$= -2(k+2)(k+1) - (k+1) + 5^k$$

$$= -(2k+5)(k+1) + 5^k$$

2

22. listopadu 2021 12:33

Příklad 2. Najděte explicitní vyjádření pro n-tý člen posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, které jsou defiované vztahem

$$a_0 = 1, b_0 = 0,$$
$$a_n - b_{n-1} = 2 \text{ pro } n \geq 1,$$
$$b_n - a_{n-1} = 0 \text{ pro } n \geq 1.$$

3

22. listopadu 2021 12:34

Příklad 3. Najděte explicitní vyjádření pro n-tý člen posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, které jsou defiované vztahem

$$
\begin{aligned}
&a_0 = 4, a_1 = 4, b_0 = 4, b_1 = 0,\\
&a_n = b_{n-1} - b_{n-2} \text{ pro } n \geq 2,\\
&b_n = a_{n-1} + b_{n-2} + a_{n-2} \text{ pro } n \geq 2.
\end{aligned}
$$

Příklad 4. Najděte explicitní vyjádření pro n-tý člen posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, které jsou defiované vztahem

$$a_0 = 3, b_0 = 2, b_1 = -12,$$
$$a_n = 3b_{n-1} - a_{n-1} \text{ pro } n \geq 1,$$
$$b_n = 2a_{n-2} - 4b_{n-1} \text{ pro } n \geq 2.$$