

Domácí úkoly Algebra I – podzim 2023 – 11. týden

1. Pro $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ jsou na množině $R \times R$ definovány operace \oplus a $*$ předpisy

$$\begin{aligned}(a, b) \oplus (c, d) &= (a + c, b + d), \\ (a, b) * (c, d) &= (-ad - bc, ac - bd).\end{aligned}$$

Rozhodněte, zda $(R \times R, \oplus, *)$ je okruh/obor integrity/těleso.

2. Určete, pro která přirozená čísla $n \geq 2$ je množina

$$I_n = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}, [a]_n = [b]_n\}$$

ideálem okruhu $(R, +, \cdot)$, kde $R = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Pro tato n nalezněte nějakou konečnou množinu generátorů ideálu I_n , rozhodněte, zda se jedná o prvoideál nebo maximální ideál, a ukažte, kterému známému okruhu je izomorfní okruh $(R, +, \cdot)/I_n$.