Algebra I – podzim 2018 – 4. termín

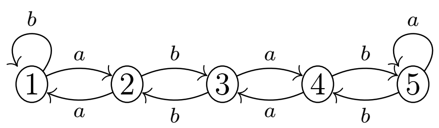
Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. (10 bodů) Rozhodněte, zda předpis

$$[y]_m * [z]_n = \left[\frac{ny + mz}{\operatorname{nsd}(m, n)}\right]_{\operatorname{nsn}(m,n)}$$

pro $y, z \in \mathbb{Z}$ a $m, n \in \mathbb{N}$, definuje operaci na množině $S = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n$ takovou, že $(S, *)$ je pologrupa, případně grupa.

2. (10 bodů) Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. (15 bodů) Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $\big((\mathbb{Z}[x], +)\times(\mathbb{Z}[\mathrm{i}], +)\big)/H$, kde

$$H = \left\{ \big(f, f(\mathrm{i}) + 2z\mathrm{i}\big) \;\middle|\; z \in \mathbb{Z},\ f \in \mathbb{Z}[x],\ x^2 - 2x + 2 \text{ dělí } f \right\}.$$

4. (10 bodů) Určete minimální polynom čísla $\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)$ nad $\mathbb{Q}$.

5. (15 bodů) Vyjádřete číslo

$$\frac{1}{\alpha^5 + 2\alpha^4 + 3\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2}$$

bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli, víte-li, že číslo α splňuje rovnost $\alpha^5 + 2 = -2(\alpha + 1)(\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha)$.

6. (10 bodů) Dejte příklad okruhu R, jeho podokruhu S a podmnožiny $I \subseteq S$, která je ideálem S, ale není ideálem R.

7. (10 bodů) Dejte příklad grup G a H takových, že H není izomorfní žádné podgrupě grupy G, G není izomorfní žádné podgrupě grupy H a přitom existují právě dvě podgrupy grupy G, které jsou izomorfní nějaké podgrupě grupy H.

8. (5 bodů) Definujte podílové těleso oboru integrity.

9. (5 bodů) Formulujte tvrzení popisující všechna konečná tělesa.

10. (10 bodů) Přímo z definice podgrupy dokažte, že levé třídy rozkladu grupy podle podgrupy jsou po dvou disjunktní.