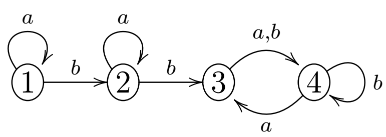
Algebra I – podzim 2019 – 4. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Na množině $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ je definována relace ekvivalence $\sim$ předpisem
$$(a, b, c) \sim (d, e, f) \qquad \Longleftrightarrow \qquad af = cd \ \&\ bf = ce.$$
Rozhodněte, zda předpis
$$[(a, b, c)]_\sim * [(d, e, f)]_\sim = [(ad - be, ae + bd, cf)]_\sim$$
korektně definuje na množině $S/\sim$ operaci takovou, že $(S/\sim, *)$ je pologrupa, případně grupa.

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $(G, \cdot)/H$, kde
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c & f \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c, d \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}],\ f \in \mathbb{C}[x] \right\},$$
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a\,\mathrm{i} & f \\ 0 & 1 & a + 2b + c\,\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{Z},\ f \in \mathbb{C}[x], f(2) = f(\mathrm{i}) \right\}.$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $(1 + \mathrm{i} + \sqrt{2}\,\mathrm{i})/\sqrt{2}$ nad $\mathbb{Q}$.

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo
$$\frac{1}{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4}$$
bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli, víte-li, že číslo α splňuje rovnost $\alpha^4 + 8\alpha = -2(\alpha^3 + \alpha^2 + 1)$.

6. **(10 bodů)** Dejte příklad oboru integrity a jeho ideálu, který není prvoideál.

7. **(10 bodů)** Dejte příklad grupy G a homomorfismu $\varphi\colon G \to G$, který splňuje rovnost $\varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_G$, ale nesplňuje rovnost $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_G$.

8. **(5 bodů)** Definujte okruh polynomů nad okruhem $(R, +, \cdot)$.

9. **(5 bodů)** Popište vztah mezi rozšířeními těles konečného stupně a rozšířeními těles o algebraické prvky. Tyto pojmy vysvětlete.

10. **(10 bodů)** Dokažte, že každý ideál okruhu polynomů nad tělesem je hlavní.