Algebra I – podzim 2020 – 1. termín

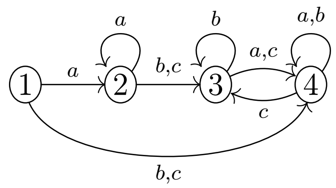
Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Na množině $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ uvažujme binární operace $\oplus$ a $*$ definované předpisy

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d),$$
$$(a,b)*(c,d)=\left(\frac{ac+bd}{2},\frac{ad+bc}{2}\right).$$

Rozhodněte, zda $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\oplus,*)$ je okruh, případně obor integrity.

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $(G,\cdot)/H$, kde

$$G=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\0&1&d\\0&0&a\end{pmatrix}\;\middle|\; a\in\{-1,1\},\ b,d\in\mathbb{Z},\ c\in\mathbb{C}\right\},$$
$$H=\left\{\begin{pmatrix}1&b&r\\0&1&b+2e\\0&0&1\end{pmatrix}\;\middle|\; b,e\in\mathbb{Z},\ r\in\mathbb{R}\right\}.$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $1+\sqrt{3}+\sqrt{\sqrt{3}-1}\cdot i$ nad $\mathbb{Q}$.

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo

$$\frac{1}{\alpha^3+2\alpha^2+\alpha-1}$$

bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli, víte-li, že číslo α splňuje rovnost $\alpha^3\cdot(\alpha+2)=2\cdot(\alpha-1)$.

6. **(10 bodů)** Dejte příklad okruhu, který není těleso a má právě 40 jednotek.

7. **(10 bodů)** Dejte příklad grupových homomorfismů $\varphi,\psi\colon G\to G$, které splňují $\ker(\varphi)=\ker(\psi)$, $\varphi(G)\neq\psi(G)$ a $\varphi(G)\subseteq\psi(G)$.

8. **(5 bodů)** Definujte normální podgrupu a faktorovou grupu.

9. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení popisující nerozložitelné polynomy nad $\mathbb{C}$ a nad $\mathbb{R}$.

10. **(10 bodů)** Dokažte, že každý ideál okruhu polynomů nad tělesem je konečně generovaný.