Algebra I – podzim 2020 – 2. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. (10 bodů) Na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ uvažujme relaci ekvivalence $\sim$ definovanou předpisem

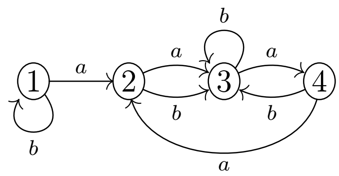
$$(a, b) \sim (\bar{a}, \bar{b}) \iff (a - \bar{a}) - (b - \bar{b}) \in \mathbb{Z}.$$

Pro každý z následujících předpisů rozhodněte, zda korektně definuje na množině $S = (\mathbb{R} \times \mathbb{R})/\sim$ operaci takovou, že $(S, \star)$ je pologrupa.

(a) $[(a, b)]_\sim \star [(c, d)]_\sim = [(c - b, d - a)]_\sim$, pro $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

(b) $[(a, b)]_\sim \star [(c, d)]_\sim = [(a \cdot c, b \cdot d)]_\sim$, pro $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

2. (10 bodů) Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. (15 bodů) Určete, které známé grupě je izomorfní grupa

$$\big((G, \cdot) \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)\big)/H,$$

kde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} p & f \\ 0 & p \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ f \in \mathbb{Q}[x] \right\},$$
$$H = \left\{ \left(\begin{pmatrix} p & f \\ 0 & p \end{pmatrix}, p, p \right) \mid p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ f \in \mathbb{Q}[x] \text{ má kořen } \sqrt{2} \right\}.$$

4. (10 bodů) Určete minimální polynom čísla $2 - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ nad $\mathbb{Q}$.

5. (15 bodů) Vyjádřete číslo

$$\frac{1}{\alpha^4 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5},$$

kde α splňuje $\alpha^4 = -3 \cdot (\alpha^2 + \alpha + 2)$, bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli.

6. (10 bodů) Dejte příklad grupy, která má právě šest podgrup.

7. (10 bodů) Dejte příklad okruhů R a S a dvou různých homomorfismů R do S.

8. (5 bodů) Definujte, co se rozumí tím, když se o oboru integrity řekne, že je s jednoznačným rozkladem.

9. (5 bodů) Formulujte tvrzení popisující všechny surjektivní homomorfismy grup.

10. (10 bodů) Dokažte, že za předpokladu konečnosti je definice tělesa ekvivalentní definici oboru integrity.