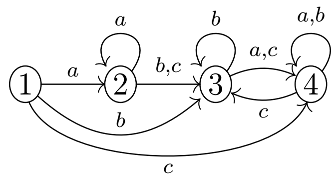
Algebra I – podzim 2020 – 3. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Nechť R značí okruh polynomů nad okruhem
$$(\{\, a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z} \,\}, +, \cdot).$$
Rozhodněte, zda množina všech polynomů v R, jejichž lineární koeficient je tvaru $2a + b\sqrt{2}$ a konstantní koeficient je tvaru $2c + 2d\sqrt{2}$, pro $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, je ideálem okruhu R. Dále rozhodněte, zda množina všech polynomů v R, jejichž lineární koeficient je tvaru $8a+b\sqrt{2}$ a konstantní koeficient je tvaru $c+2d\sqrt{2}$, pro $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, je podokruhem okruhu R.

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $(G, \cdot)/H$, kde
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 & f \\ 0 & q & g \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f, g \in \mathbb{C}[x] \right\},$$
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 & f \\ 0 & \varepsilon \cdot p & g \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \varepsilon \in \{1, -1\},\ f, g \in \mathbb{C}[x],\ f(2) \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} + \sqrt{2} + 1$ nad $\mathbb{Q}$.

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo
$$\frac{1}{\alpha^3 + \alpha + 6},$$
kde α splňuje $\alpha^2 \cdot (\alpha^2 + 2) = -2 \cdot (2\alpha + 1)$, bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli.

6. **(10 bodů)** Dejte příklad grupy G a homomorfismu $\varphi\colon G \to G$, které splňují $\varphi \neq \varphi \circ \varphi$ a $\ker(\varphi) = \ker(\varphi \circ \varphi)$.

7. **(10 bodů)** Dejte příklad okruhu obsahujícího právě 12 prvků, které nejsou jednotky.

8. **(5 bodů)** Definujte, co se rozumí tím, když se o oboru integrity řekne, že je s jednoznačným rozkladem.

9. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení popisující všechny faktorové grupy grupy $(G, \cdot)/H$, kde $H \trianglelefteq (G, \cdot)$.

10. **(10 bodů)** Dokažte, že inverze k izomorfismu pologrup je izomorfismus.