Algebra I – podzim 2020 – 4. termín

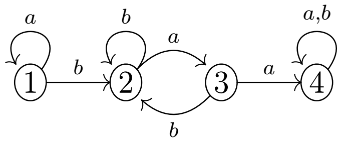
Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Na množině $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ jsou definovány asociativní operace $\oplus$ a $*$ předpisy

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b) * (c, d) = (ac + bd, ad + bc + 2bd).$$

Rozhodněte, zda $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus, *)$ je okruh, případně obor integrity, případně těleso.

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Určete, které známé grupě je izomorfní grupa

$$\big((\mathbb{R}[x], +) \times (\mathbb{C}, +)\big)/H,$$

kde

$$H = \big\{\, (f, f(\mathrm{i} + 1) + a) \mid a \in \mathbb{R},\ f \in \mathbb{R}[x] \text{ má kořen i} \,\big\}.$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $(\sqrt{2} + 1) \cdot \sqrt{\sqrt{2} + 3} + \sqrt{2} - 1$ nad $\mathbb{Q}$.

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo

$$\frac{1}{\alpha^4 + 2\alpha^3 + 2\alpha^2 + 8\alpha + 2},$$

kde α splňuje $\alpha^4 + 8\alpha = 2\alpha^2 + 6$, bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli.

6. **(10 bodů)** Dejte příklad grupy, která má právě 15 cyklických podgrup.

7. **(10 bodů)** Dejte příklad netriviálních okruhů R, S, T spolu se surjektivními homomorfismy $\varphi\colon R \to S$ a $\psi\colon S \to T$, které nejsou injektivní.

8. **(5 bodů)** Definujte ideál, prvoideál a maximální ideál okruhu.

9. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení o existenci a jednoznačnosti podílového tělesa.

10. **(10 bodů)** Dokažte, že počet prvků libovolné podgrupy konečné grupy G dělí počet prvků grupy G.