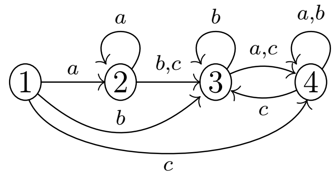
Algebra I – podzim 2021 – 3. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Pro každý z následujících předpisů rozhodněte, zda korektně definuje binární operaci na množině $S = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{13}$, a pokud ano, tak určete, zda množina S spolu s touto operací je pologrupa.

   Pro $a, b, k, \ell \in \mathbb{Z}, k \geq 1, \ell \geq 1$:
$$([k]_6, [a]_{13}) \bullet ([\ell]_6, [b]_{13}) = ([k+\ell]_6, [a \cdot 2^\ell + b]_{13}),$$
$$([k]_6, [a]_{13}) \star ([\ell]_6, [b]_{13}) = ([k+\ell]_6, [2 \cdot a \cdot 3^\ell + b]_{13}),$$
$$([k]_6, [a]_{13}) \diamond ([\ell]_6, [b]_{13}) = ([k+\ell]_6, [a \cdot 3^\ell + b]_{13}).$$

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $(G, \cdot)/H$, kde
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 & c \\ 0 & q & f \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \;\middle|\; p, q \in \{1, -1\},\ c \in \mathbb{C},\ f \in \mathbb{Z}[x] \right\},$$
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & r \cdot (1+\mathrm{i}) \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; r \in \mathbb{R},\ f \in \mathbb{Z}[x] \text{ má sudý součet koeficientů} \right\}.$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 2$ nad $\mathbb{Q}$.

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo
$$\frac{1}{\alpha^4 + \alpha^3 + 8\alpha - 2},$$
   kde α splňuje $(\alpha^3 + 2\alpha)(\alpha + 2) = -4\alpha - 2$, bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli.

6. **(10 bodů)** Dejte příklad grupy G, která má právě čtyři podgrupy různé od jednoprvkové podgrupy a od celé grupy G a žádná z těchto čtyř podgrup není obsažena v jiné. Všechny tyto podgrupy vypište.

7. **(10 bodů)** Dejte příklad homomorfismů oborů integrity $\varphi\colon R \to S$ a $\psi\colon S \to T$, kde S je těleso, zatímco R a T tělesa nejsou.

8. **(5 bodů)** Definujte podílové těleso oboru integrity.

9. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení popisující pro grupu $(G, \cdot)$ a její normální podgrupu H všechny homomorfismy z grupy $(G, \cdot)/H$ do libovolné grupy pomocí homomorfismů z grupy $(G, \cdot)$.

10. **(10 bodů)** Dokažte, že inverze k izomorfismu pologrup je izomorfismus.