Algebra I – podzim 2021 – 5. termín

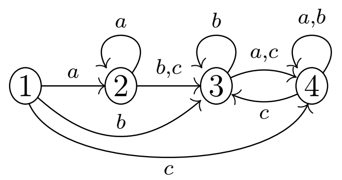
Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Určete, pro která přirozená čísla k je množina

$$M_k = \{\, a + b\sqrt{10} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ [k \cdot a]_{13} = [b]_{13} \,\}$$

podokruhem, případně ideálem, okruhu $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $(G, \cdot)/H$, kde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}],\ c \in \mathbb{C} \right\},$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2k + 6\ell\sqrt{2} & r \\ 0 & 1 & 3\ell + 2\ell\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; k, \ell \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{8}$ nad $\mathbb{Q}$.

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo

$$\frac{1}{\alpha^4 + 20\alpha + 4}$$

bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli, víte-li, že číslo α splňuje rovnost $(\alpha^2 - 1) \cdot (\alpha^2 + 3) = -26\alpha - 9$.

6. **(10 bodů)** Dejte příklad oboru integrity $(R, \oplus, \odot)$ a homomorfismu okruhů

$$\varphi\colon (R, \oplus, \odot) \to (\mathbb{Z}, +, \cdot),$$

který není izomorfismus.

7. **(10 bodů)** Dejte příklad grupy G a její podgrupy H takové, že není jádrem žádného homomorfismu z G a rozklad G podle H má právě šest levých tříd.

8. **(5 bodů)** Definujte jednotky a nerozložitelné prvky oboru integrity.

9. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení o rozkladu homomorfismu grup na tři homomorfismy speciálního typu.

10. **(10 bodů)** Přímo z definic dokažte, že každá grupa je izomorfní nějaké grupě permutací.