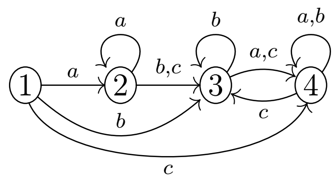
Algebra I – podzim 2022 – 4. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Pro každou z uvedených množin polynomů nad $\mathbb{Z}$ rozhodněte, zda je ideálem nebo podokruhem okruhu $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \{\, f \in \mathbb{Z}[x] \mid f = 0 \text{ nebo } f \text{ má dvojnásobný kořen } 1 \,\}\\
I_2 &= \{\, f \in \mathbb{Z}[x] \mid f = 0 \text{ nebo } f \text{ má alespoň dvojnásobný kořen } 1 \,\}\\
I_3 &= \{\, f \in \mathbb{Z}[x] \mid f \text{ má racionální kořen} \,\}\\
I_4 &= \{\, f + g \mid f, g \in I_3 \,\}\\
I_5 &= \{\, f \in \mathbb{Z}[x] \mid f(1) = f(2) \,\}
\end{aligned}$$

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $(G, \cdot)/H$, kde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & r \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}],\ r \in \mathbb{Z}[\sqrt[4]{2}] \right\},$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \cdot c & d + 3\ell\sqrt[4]{2} \\ 0 & 1 & c + 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c, d \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}],\ k, \ell \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $\sqrt{2} + \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{8}$ nad $\mathbb{Q}$.

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo

$$\frac{1}{\alpha^4 + 20\alpha + 4}$$

bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli, víte-li, že číslo α splňuje rovnost $2\alpha^2 = \alpha^4 + 14\alpha + 2$.

6. **(10 bodů)** Dejte příklad okruhu R a jeho dvou podokruhů S a T různých od R takových, že S a T jsou jediné podokruhy okruhu R, které jsou tělesy.

7. **(10 bodů)** Dejte příklad grupy G a jejích dvou podgrup H a K takových, že $H \cong K$, ale neexistuje izomorfismus $\varphi\colon G \to G$ splňující $\varphi(H) = K$.

8. **(5 bodů)** Definujte jednotky a nerozložitelné prvky oboru integrity.

9. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení o rozkladu homomorfismu grup na tři homomorfismy speciálního typu.

10. **(10 bodů)** Přímo z definice podgrupy dokažte, že levé třídy rozkladu grupy podle podgrupy jsou po dvou disjunktní.