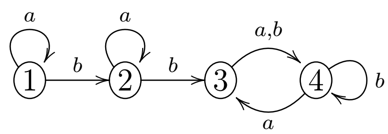
Algebra I – podzim 2022 – 5. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. (10 bodů) Uvažujme grupu $(\mathbb{Q} \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\}), *)$, kde $(p, q) * (r, s) = (p + q \cdot r, q \cdot s)$ pro všechna $p, r \in \mathbb{Q}$ a $q, s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Pro každou z uvedených množin rozhodněte, zda je její podpologrupou, podgrupou, případně normální podgrupou.

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{\, (q-1, q) \mid q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \,\} \\
M_2 &= \{\, (\tfrac{a}{b}, \tfrac{c}{d}) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ c \neq 0,\ 2 \nmid b,\ 2 \nmid d \,\} \\
M_3 &= \{\, (\tfrac{a}{b}, \tfrac{c}{d}) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ 2 \nmid a,\ 2 \nmid b,\ 2 \nmid c, 2 \nmid d \,\} \\
M_4 &= \{\, (p, \tfrac{c}{d}) \mid p \in \mathbb{Q},\ c, d \in \mathbb{Z},\ 2 \nmid c,\ 2 \nmid d \,\} \\
M_5 &= \{\, (\tfrac{a}{b}, \tfrac{a}{c}) \mid a, b, c \in \mathbb{N},\ b < c \,\}
\end{aligned}$$

2. (10 bodů) Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. (15 bodů) Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $(G, \cdot)/H$, kde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} p & a & f \\ 0 & p & b \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \;\middle|\; p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}),\ f \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x] \right\},$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} q & r \cdot (1 + \sqrt{2}) & f \\ 0 & q & s \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \;\middle|\; q \in \{-1, 1\},\ r, s \in \mathbb{Q},\ f \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x],\ f(1) = f(2) \right\}.$$

4. (10 bodů) Určete minimální polynom čísla $(1 + \mathrm{i} + \sqrt{2}\,\mathrm{i})/\sqrt{2}$ nad $\mathbb{Q}$.

5. (15 bodů) Vyjádřete číslo

$$\frac{1}{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4}$$

bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli, víte-li, že číslo α splňuje rovnost $\alpha^4 + 6\alpha = -2(\alpha + 1)(\alpha^2 + 1)$.

6. (10 bodů) Dejte příklad dvou okruhů, které mají stejný konečný počet jednotek, ale jejichž grupy jednotek nejsou izomorfní.

7. (10 bodů) Dejte příklad grupy, která má právě šest izomorfismů na sebe.

8. (5 bodů) Definujte podílové těleso oboru integrity.

9. (5 bodů) Formulujte tvrzení charakterizující, kdy je faktorový okruh komutativního okruhu tělesem a kdy oborem integrity. V tvrzení použité pojmy definujte.

10. (10 bodů) Dokažte, že každý pologrupový homomorfismus mezi dvěma grupami je homomorfismem grupovým. Vycházejte přitom přímo z definic homomorfismů a grupy.