Algebra I – podzim 2023 – 1. termín

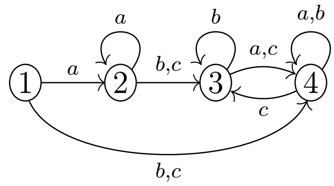
Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Na množině $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ uvažujme binární operace $\oplus$ a $*$ definované pro $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_n$ předpisy

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b) * (c, d) = (ad - ac + bc, ac + bd).$$

Pro hodnoty $n = 3$ a $n = 5$ rozhodněte, zda $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n, \oplus, *)$ je okruh/obor integrity.

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Nalezněte součin známých grup, který je izomorfní faktorové grupě $(G, \cdot)/H$, kde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} p & a & r \\ 0 & p & b \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \;\middle|\; p \in \{1, -1\},\ a, b \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \right\},$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & a\sqrt{2} + c \\ 0 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \mathrm{i} - \sqrt{2}$ nad $\mathbb{Q}$.

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo

$$\frac{1}{\alpha^4 + 2\alpha^2 + 8}$$

bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli, víte-li, že číslo α splňuje rovnost $\alpha^3(\alpha + 2) = -4\alpha - 10$.

6. **(10 bodů)** Dejte příklad okruhu R a jeho nenulového ideálu I takového, že je faktorový okruh R/I izomorfní okruhu $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

7. **(10 bodů)** Dejte příklad grupy G a jejích podgrup H a K takových, že $H \nsubseteq K$, $K \nsubseteq H$ a průnik $H \cap K$ má právě dva prvky.

8. **(5 bodů)** Definujte jednotky a nerozložitelné prvky oboru integrity.

9. **(5 bodů)** Uveďte, jaké jsou vztahy mezi obory integrity a tělesy.

10. **(10 bodů)** Přímo z definice podgrupy dokažte, že levé třídy rozkladu grupy podle podgrupy jsou po dvou disjunktní.