Algebra I – podzim 2023 – 2. termín

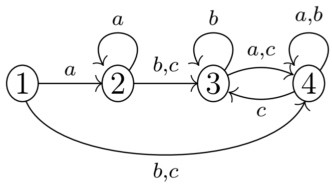
Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. (10 bodů) Uvažujme podmnožiny I_1, I_2, I_3 okruhu $\mathbb{Z}[\sqrt{10}][x]$, přičemž podmnožina I_j obsahuje právě ty polynomy nad $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$, jejichž konstantní koeficient náleží do množiny K_j a lineární koeficient do množiny L_j, kde

$$\begin{aligned}
K_1 &= \{\, 10a + b\sqrt{10} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ [a]_9 = [b]_9 \,\},\\
L_1 &= \{\, 2c + d\sqrt{10} \mid c, d \in \mathbb{Z},\ [c]_3 = [-d]_3 \,\},\\
K_2 &= \{\, 5a + b\sqrt{10} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ [a]_3 = [-b]_3 \,\},\\
L_2 &= \{\, 2c + d\sqrt{10} \mid c, d \in \mathbb{Z} \,\},\\
K_3 = L_3 &= \{\, 5a + b\sqrt{10} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ [a]_4 = [b]_4 \,\}.
\end{aligned}$$

Pro každou z podmnožin I_1, I_2, I_3 rozhodněte, zda je ideálem okruhu $\mathbb{Z}[\sqrt{10}][x]$.

2. (10 bodů) Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. (15 bodů) Nalezněte součin známých grup, který je izomorfní faktorové grupě $(G, \cdot)/H$, kde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ c \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \right\},$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2d & 2d\,\mathrm{i} + e \\ 0 & 1 & 4d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; d, e \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4. (10 bodů) Určete minimální polynom čísla $\sqrt{\sqrt{3}+1} \cdot \mathrm{i} - \sqrt{3} + 1$ nad $\mathbb{Q}$.

5. (15 bodů) Vyjádřete číslo

$$\frac{1}{\alpha^3 + \alpha^2 - \alpha}$$

bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli, víte-li, že číslo α splňuje rovnost $\alpha^4 + 3\alpha^3 = 3 \cdot (1 - \alpha^2) \cdot (\alpha + 1)$.

6. (10 bodů) Dejte příklad okruhu, který není podokruhem žádného tělesa, a jeho podokruhu, který je těleso.

7. (10 bodů) Dejte příklad grupy $(G, \cdot)$, izomorfismu $\varphi\colon G \to G$ a podgrupy $H \subseteq G$ takových, že $\varphi(H) \subseteq H$, ale přitom $\varphi(H) \neq H$.

8. (5 bodů) Definujte okruh polynomů nad okruhem $(R, +, \cdot)$.

9. (5 bodů) Formulujte tvrzení popisující všechny ideály, prvoideály a maximální ideály v okruhu polynomů nad tělesem.

10. (10 bodů) Dokažte, že každý pologrupový homomorfismus mezi dvěma grupami je homomorfismem grupovým. Vycházejte přitom přímo z definic homomorfismů a grupy.